MATEMÁTICA: CASUÍSTICA

Competencia: Resuelve problemas de forma, movimiento y localización.

Temas: Geometría del espacio.

1. Una docente tiene como propósito que los estudiantes de primer grado desarrollen aprendizajes que involucran el volumen de un prisma. En este marco, propone que los estudiantes formen grupos y les entrega una caja con cubitos del mismo tamaño. Luego, les plantea la siguiente tarea:

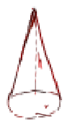
Los cubitos tienen aristas de 0,5 u de longitud. Construyan un prisma que tenga 10 u^3 de volumen.

¿Por qué esta tarea es de **alta** demanda cognitiva?

a) Porque requiere efectuar operaciones de potenciación y división con números racionales.
b) Porque requiere manipular con destreza a una cantidad numerosa de cubitos para construir el prisma indicado.
c) Porque requiere relacionar la medida de la arista de cada cubito y la cantidad de cubitos que conforman el volumen del prisma.

2. Una familia se dedica a la producción de chocolates artesanales. Estos presentan forma cónica y tienen el mismo tamaño. Por su buena acogida, han decidido iniciar la producción de una nueva presentación de los chocolates, la cual mantendrá la forma cónica, pero tendrá la mitad del volumen de la primera. Entre las siguientes alternativas, ¿cuál podría ser la relación entre las medidas de ambas presentaciones?

Diseño original:



$V_\triangle = \frac{1}{3}\pi r^2 h$

Nuevo diseño

$V = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\pi r^2 h$

$V = \frac{1}{3}\pi \frac{r^2}{2} h$

$V = \frac{1}{3}\pi \frac{r^2}{\sqrt{2}^2} h$

$V = \frac{1}{3}\pi \left(\frac{r}{\sqrt{2}}\right)^2 h$

$V = \frac{1}{3}\pi r^2 \left(\frac{h}{2}\right)$

a) La altura de la nueva presentación será la mitad de la altura de la presentación inicial, pero el diámetro de la base de cada una de ellas tendrá la misma medida.
b) El diámetro de la base de la nueva presentación será la mitad de la medida respectiva de la presentación inicial, pero sus alturas tendrán la misma medida.
c) Tanto el diámetro de la base como la altura de la nueva presentación tendrá la mitad de las correspondientes medidas de la presentación inicial.

3. Una docente propone la siguiente actividad a sus estudiantes:

- Observen a su alrededor objetos que tengan forma de cilindro o forma de esfera, y digan sus características.
- Representen gráficamente, en una hoja, una esfera inscrita en un cilindro. Luego, respondan: “Al comparar el radio de la esfera y el radio de las bases del cilindro, ¿estas medidas son iguales o una de ellas es mayor que la otra? ¿Por qué?”.
- Expresen el volumen de la esfera y del cilindro en función del radio; luego, dividan ambos volúmenes y, finalmente, planteen conclusiones con respecto a estos volúmenes.

¿Cuál de las siguientes alternativas expresa el **principal** propósito de la actividad propuesta?

a) Calcular volúmenes de una esfera y un cilindro cuando la esfera está inscrita en el cilindro.

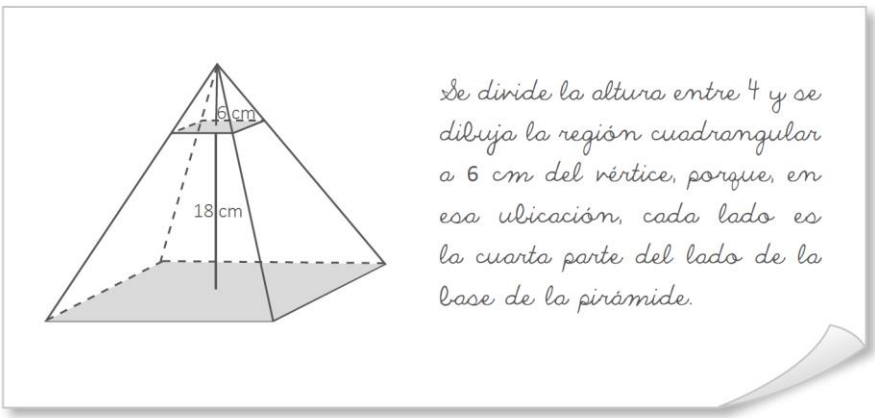
b) Establecer relaciones entre los volúmenes de la esfera y el cilindro cuando la esfera está inscrita en el cilindro.

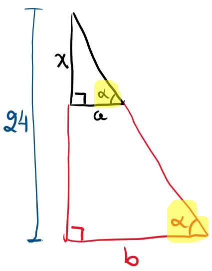
c) Representar gráficamente una esfera inscrita en un cilindro de modo que se evidencie que son figuras que tienen volumen.

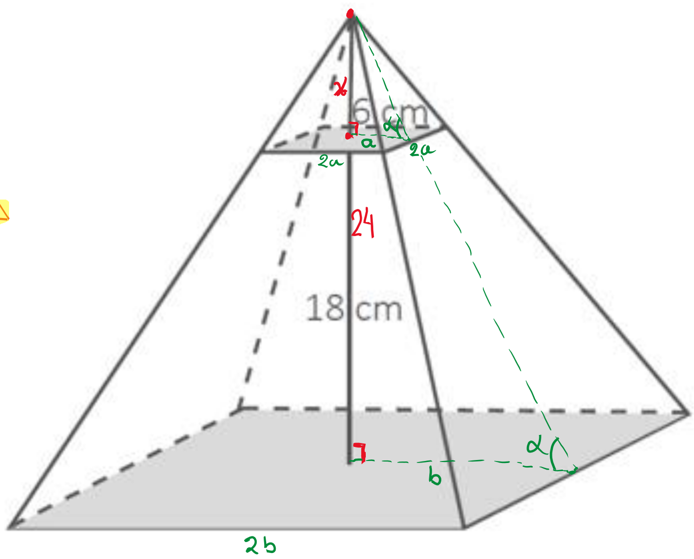
4. Un docente está trabajando con sus estudiantes actividades que involucran sólidos geométricos. Para ello, les solicitó que representen gráficamente una pirámide cuadrangular de 24 cm de altura. Luego, les preguntó:

“¿A cuántos centímetros del vértice se debe dibujar una región cuadrangular paralela a la base cuya área sea la cuarta parte del área de la base de la pirámide? Expliquen su respuesta”.

Un estudiante presentó la siguiente resolución:







Area de la base mayor $= (2b)^2 = 4b^2$

Area de la base menor $= (2a)^2 = \frac{1}{4}(4b^2)$

$4a^2 = b^2$

$2a = b$

Lado de base → $4a = 2b$

Por semejanza de triángulos.

$\tan\alpha = \frac{x}{a} = \frac{24}{b}$

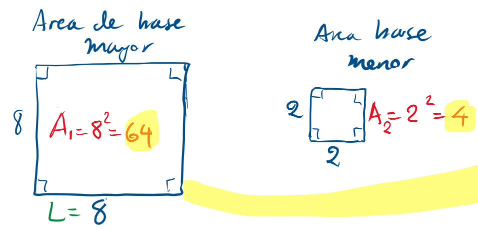
$\frac{x}{a} = \frac{24}{2a}$

$x = 12$

El docente busca retroalimentar al estudiante para que reflexione sobre la resolución que presentó. ¿Cuál de las siguientes acciones pedagógicas es la más pertinente para conseguir este propósito?

a) Solicitarle que reconsidere su resolución, ya que, efectivamente, la longitud de cada lado de la región cuadrangular que ha dibujado mide la cuarta parte del lado de la base, pero es incorrecto señalar que el área de esta región equivale a la cuarta parte del área de la base de la pirámide. Luego, animarlo a seguir intentando resolver el problema.

b) Pedirle que revise, asignando valores, si el hecho de que el lado de la región cuadrangular sea la cuarta parte del lado de la base significa que su área también sea la cuarta parte del área de la base de la pirámide. Luego, preguntarle por la relación que debe haber entre ambos lados para que sus áreas cumplan con la condición dada.



Area de la base menor

$A_2 = 16$ (buscada)

$l = 4$

✓ En 2 polígonos semejantes:

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{(a_1)^2}{(a_2)^2}$$

✓ En 2 sólidos semejantes

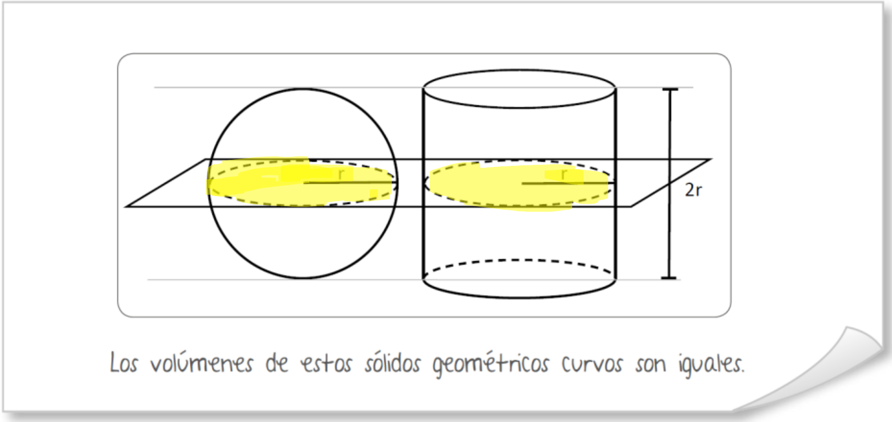
$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{(a_1)^3}{(a_2)^3}$$

c) Proponerle valores para que se dé cuenta que el área de la región que ha dibujado es la dieciseisava parte del área de la base y decirle que, si se quiere dibujar una región cuya área sea la cuarta parte, esta debe ser dibujada a la mitad de la altura de la pirámide. Luego, pedirle que la dibuje y que compruebe asignando valores.

5. Un docente tiene como propósito que sus estudiantes comprendan cuándo dos sólidos geométricos tienen volúmenes iguales. Para ello, les presenta el siguiente principio:

> Si dos o más cuerpos tienen la misma altura y, además, tienen igual área en cualquiera de sus secciones planas tomadas a una misma altura, entonces, poseen igual volumen.

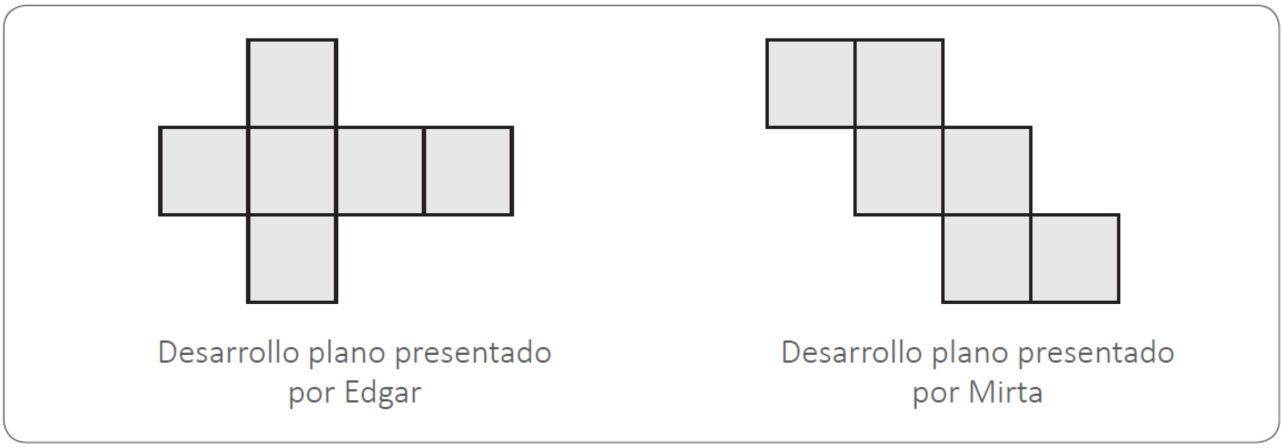
Luego, el docente solicita a los estudiantes que, en equipos, grafiquen algunos casos en los que se cumpla este principio.
Uno de los equipos presentó el siguiente gráfico:



Considerando el error en el que incurrieron al interpretar el principio, ¿por qué los estudiantes de este equipo concluyen que los volúmenes de ambos sólidos son iguales?

a) Porque consideran que es suficiente con que, en los sólidos, las áreas de sus regiones circulares, tomadas a una misma altura, al menos en un caso, sean iguales.
b) Porque consideran que es suficiente con que los sólidos tengan superficie curva y que las áreas de sus regiones circulares máximas sean iguales.
c) Porque consideran que es suficiente con que el plano horizontal que corta a los sólidos transversalmente determine regiones circulares.

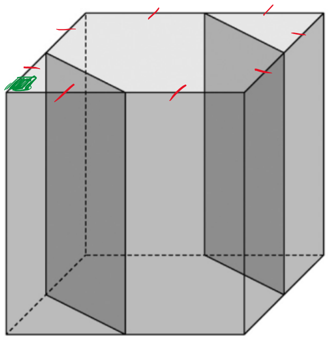
6. Una docente solicitó a los estudiantes de primer grado que elaboren el desarrollo plano de un hexaedro regular. Estas son las respuestas de dos estudiantes.



Edgar comenta que el desarrollo plano presentado por Mirta es incorrecto, porque el hexaedro solamente se forma con el desarrollo plano que él ha elaborado.
Respecto al comentario de Edgar, ¿cuál de las siguientes alternativas expresa el error en el que incurre?

a) Considera un modelo usual como el único desarrollo plano del hexaedro.
b) Cree que, en el desarrollo plano del hexaedro, cada cara tiene solo una cara adyacente.
c) Reconoce el hexaedro en su forma tridimensional; sin embargo, no lo hace en su desarrollo plano.

7. Como parte de una actividad, un docente presenta un cubo hecho en madera y le pide a los estudiantes que se imaginen que dos planos paralelos cortan al cubo transversalmente, de modo que cada uno de los planos pasa por los puntos medios de dos aristas consecutivas, tanto en la base superior como en la inferior del cubo, tal como se muestra a continuación:



Además, el docente les solicita que establezcan qué objetos tridimensionales resultarían después de realizar dichos cortes y cuáles serían sus desarrollos planos.

Al respecto, un estudiante dice lo siguiente: “Profesor, yo creo que si realizáramos esos cortes, resultarían tres prismas: dos iguales de base triangular y un prisma de base hexagonal”.

Sin embargo, cuando el estudiante muestra el desarrollo plano de estos prismas, utiliza un triángulo equilátero en un caso y un hexágono regular en otro para los polígonos que representan las bases.

¿Cuál de los siguientes grupos de preguntas es más pertinente para retroalimentar al estudiante de modo que reflexione sobre el error de considerar polígonos regulares en las bases de los prismas?

a) “¿En qué puntos los planos paralelos secantes cortan a las aristas del cubo? Si en el prisma triangular, los lados de sus bases son diferentes, ¿estará bien considerar el triángulo equilátero en su desarrollo plano? Si en el prisma hexagonal, dos de los lados de sus bases son diferentes de los demás, ¿estará bien considerar el hexágono regular en su desarrollo plano?”.

b) “¿Uno de los ángulos rectos de las bases del cubo será uno de los ángulos de la base del prisma triangular? De ser así, ¿esos tres lados tendrán la misma medida? Según sus medidas, ¿ese triángulo será equilátero como en el desarrollo plano que elaboraste? ¿Pasará algo similar con los lados de la base del prisma hexagonal? ¿Por qué?”.

c) “¿Qué polígonos conforman las bases de los prismas? ¿Qué características tienen estos polígonos en los desarrollos planos de los prismas? ¿La cantidad de caras laterales depende de la cantidad de lados del polígono de la base? ¿Por qué crees que es así? ¿Los polígonos que conforman las bases resultarán regulares?”.

8. Un docente propone a sus estudiantes que construyan un octaedro regular cuya arista mide 8 cm. Luego les propone resolver las siguientes tareas:

I. Halla el área total de dicho octaedro.
II. Si se coloca el sólido sobre un plano, ¿cuál es la medida del área máxima de la sombra ortogonal que puede proyectar sobre el plano?
III. Si una de las aristas es perpendicular a un plano, ¿cuál es la medida del área de la sombra ortogonal que proyecta sobre el plano?
IV. Deduce la fórmula para hallar el área total del octaedro.

$A_{\Delta eq} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$ $A_{T.\ octaedro} = 8\left(\frac{a^2\sqrt{3}}{4}\right) = 2a^2\sqrt{3}$ ✓

V. Deduce la fórmula para calcular el volumen del octaedro en función de su arista.

¿Cuáles de las tareas mencionadas son de mayor demanda cognitiva?

a) II y III
b) IV y V
c) Todas excepto I

Lea la siguiente situación y responda las preguntas 9, 10 y 11.

Durante una clase, los estudiantes comentan acerca del aumento de la cantidad de personas que consumen a diario agua purificada. Este aumento conlleva una creciente fabricación de botellas de plástico. Al respecto, ellos han leído un artículo que señala que la descomposición de envases de cartón genera 80 % menos gases de efecto invernadero que la descomposición de botellas de plástico. Por este motivo, a los estudiantes les parece una excelente idea emprender un negocio de venta de agua utilizando envases hechos a base de cartón.

9. En el contexto de una exploración de opciones para la utilización de envases hechos a base de cartón, el docente decide proponer diversas tareas.
¿Cuál de las siguientes tareas es de **mayor** demanda cognitiva?
   a) ¿Cuánto será el volumen de un envase cilíndrico hecho con cartón si el radio de su base mide $3\sqrt{3}$ cm y su altura mide 10,80 cm?
   b) ¿En qué porcentaje disminuirá el volumen de un envase cilíndrico hecho con cartón si el radio de su base disminuye hasta la mitad de la longitud inicial y se mantiene constante su altura?
   c) Se proyecta elaborar dos tipos de envase que tengan forma de prisma recto y una altura de 9 cm: uno con una base cuadrada de 9 cm^2 de área y otro con una base hexagonal regular de 12 cm de perímetro. ¿En cuál se utilizará más cartón?

10. Uno de los estudiantes diseña un envase de forma cilíndrica. Él afirma que si se duplicara la longitud del radio de la base y se mantuviera la misma altura, el cilindro resultante tendría el doble de volumen que el cilindro original.
Ante esta intervención, el docente busca orientar la reflexión del estudiante acerca de su error. ¿Cuál de las siguientes acciones pedagógicas es **más** pertinente para ello?
   a) Preguntarle lo siguiente: ¿qué forma geométrica tiene el envase?, ¿cuáles son los elementos de esta forma geométrica?, ¿qué sucede con el radio de la base?, ¿cómo se determina el volumen de un cilindro? Luego, señalar que, si se duplica solo el radio, el nuevo volumen no se duplica, sino que se cuadruplica.
   b) Entregarle un desarrollo plano para que forme un cilindro. Además, pedirle que señale los elementos del mismo, como altura, radio, base, generatriz, etc. Luego, comentarle que si el radio de la base tuviera el doble de longitud y la altura se mantuviera, el volumen del nuevo cilindro no sería el doble del volumen del cilindro construido con el desarrollo plano entregado.
   c) Solicitarle que revise qué elementos debe considerar para calcular el volumen de un envase cilíndrico. Luego, indicarle que exprese el volumen del cilindro en función del radio y la altura, y lo compare con el nuevo volumen cuando la longitud del radio se duplica y la longitud de la altura es la misma. Después, preguntarle si el nuevo volumen es el doble del volumen inicial.

11. El docente propone a los estudiantes realizar la siguiente secuencia de acciones:

1. Conformar grupos de cuatro integrantes
2. Calcular la cantidad de cartón que se utilizaría en el área lateral de un envase cilíndrico cuyo radio de la base mide 3 cm y que tiene una altura de 10 cm. Asimismo, calcular la cantidad de cartón cuando la altura se incrementa progresivamente en 1 cm hasta llegar a 15 cm; en cada caso, también calcular el respectivo volumen
3. En una tabla, registrar los valores correspondientes al área lateral y volumen del envase cilíndrico
4. En cada caso, determinar la razón geométrica entre el área lateral y el volumen de cada envase cilíndrico
5. Finalmente, elaborar las conclusiones de la actividad

¿Cuál es el **principal** propósito de la actividad propuesta?

a) Que los estudiantes desarrollen habilidades de cálculo del área y volumen de un cilindro.

b) Que los estudiantes establezcan una relación entre el área lateral y el volumen de un cilindro.

$$\frac{A_L}{V} = \frac{2\cancel{\pi} r \cancel{h}}{\cancel{\pi} r^2 \cancel{h}} = \frac{2}{r} \qquad \frac{V}{A_L} = \frac{r}{2}$$

c) Que los estudiantes determinen y registren, en una tabla, el área lateral y el volumen de diversos cilindros.

12. Un pozo de 6m de diámetro y 5 metros de profundidad fue abierto por 18 trabajadores en 25 días. Se pretende aumentar en un metro el radio del pozo y el trabajo será hecho por 14 trabajadores. El tiempo expresado en días que estos emplearán es:

a) 25

b) 18

c) 12

Comparación de magnitudes:

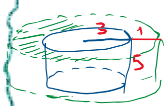
Causas	Circunstancias	efectos
Obreros	tiempo:	Producción
animales	min	Consumo
máquinas	días	obra
eficiencia	horas	
rendimiento	etc.	

$$\boxed{\frac{\text{Causas} \times \text{circunst.}}{\text{efectos}} = K}$$

Forma 1

	Sit. 1	Sit. 2
Causas (obre)	18	14
Circ. (días)	25	x
efect. (obra)	$\pi.3^2.5$	$\pi 4^2.5 - \pi.3^2.5$

$$K = \frac{\cancel{18}^{2} \cdot 25}{\cancel{\pi}.\cancel{9}.\cancel{5}} = \frac{14\,x}{5\pi(16-9)}$$



$$25 = x$$

Forma 2: Método de "tijeras"

	Causas obreros	Circ. días	ef. obra (vol)
Sit. 1	18	25	$\pi.3^2.5$
Sit. 2	14	x	$\pi.4^2.5 - \pi.3^2.5$

$$\cancel{14}.x.\cancel{\pi}.\cancel{9}.\cancel{5} = \cancel{18}^{2}.25.\cancel{5\pi}(4^2 - 3^2)$$

$$x = 25$$