



GRUPO
DOCENTE PERÚ
ALCANZANDO EL ÉXITO

MATEMÁTICA

PREPARACIÓN
**EXAMEN DE
ASCENSO
2023**

MATEMÁTICA: CASUÍSTICA
REPASO 4: MISCELANEA DE PROBLEMAS

1. En la Evaluación Censal de Estudiantes 2018, se propuso la siguiente pregunta:

Se dibujó la siguiente bandera sobre papel cuadrulado.



¿Qué parte de la bandera es de color rojo?

- a) $\frac{1}{8}$ de la bandera. b) $\frac{1}{4}$ de la bandera.
 c) $\frac{1}{3}$ de la bandera. $\frac{1}{2}$ de la bandera.

¿Cuál de las siguientes tareas es **más** pertinente para favorecer la comprensión del significado de fracción implicado en la pregunta propuesta?

- a) Resolver problemas que involucren fracciones como parte-todo, con partes diferentes en su forma o tamaño.
- b) Resolver problemas que involucren fracciones que expresen medidas particulares de superficies.
- c) Resolver problemas que involucren fracciones como operador de magnitudes continuas.
2. Durante el desarrollo de una sesión de aprendizaje, un estudiante le preguntó al docente lo siguiente: “¿ 1×10^{-3} es igual a 0,001?”.
- ¿Cuál de las siguientes acciones pedagógicas es más pertinente para ayudar al estudiante a responder su pregunta?
- a) Presentar las principales leyes de exponentes y preguntar con cuál de ellas se resuelve, por ejemplo, 10^{-3} . Luego, explicar paso a paso cómo aplicar dicha ley y proponer otros casos similares para verificar si comprendió cómo resolverlos.
- b) Explicar al estudiante que todo número con exponente negativo es igual a su inverso con exponente positivo. Luego, comentar que, cuando un número se divide entre una potencia de 10, el exponente de esta potencia indica la cantidad de espacios hacia la izquierda que se traslada la coma decimal.
- c) Pedir que, en la primera columna de una tabla, escriba, en forma descendente, las potencias de 10 desde 10^3 hasta 10^{-3} , y, en la segunda, sus respectivas equivalencias, desde 1000 hasta 0,001. Luego, preguntar por las regularidades que observa en estas potencias y cómo se aplicarían para calcular 10^{-1} , 10^{-2} y 10^{-3} .

3. Una docente planteó a los estudiantes el siguiente problema:

El diámetro del Sol es aproximadamente $1,4 \times 10^6$ km, y el diámetro del planeta Mercurio es aproximadamente $4,9 \times 10^3$ km. ¿Qué tan grande es el diámetro del Sol comparado con el de Mercurio?

Luis, uno de los estudiantes, presentó el siguiente proceso de resolución:

Resolución

$$\frac{1,4 \times 10^6}{4,9 \times 10^3} = 0,286 \times 10^{6-3}$$
$$= 0,286 \times 10^2$$
$$= 2,86 \times 10$$

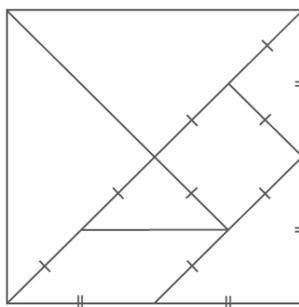
Respuesta: El diámetro del Sol es $2,86 \times 10$ veces más grande que el diámetro de Mercurio.

¿Cuál de las siguientes acciones es más pertinente para retroalimentar a Luis de modo que reflexione acerca de su error en la división de las potencias de base 10?

- Explicarle que el cociente de potencias con la misma base es igual a dicha base elevada a la diferencia de los exponentes. Luego, pedirle que realice nuevamente su resolución.
- Solicitarle que escriba 10^6 y 10^3 como la multiplicación repetida del factor 10. Luego, preguntarle cuánto es el resultado de dividir ambos números. Finalmente, pedirle que escriba ese resultado como una potencia de 10.
- Preguntarle qué es la notación científica y, a continuación, indicarle cómo se escriben los números en notación científica. Luego, pedirle que revise su procedimiento e identifique su error. Finalmente, solicitarle que vuelva a resolver el problema.

4. Un docente presentó a los estudiantes la siguiente actividad:

Un tangram de siete piezas es utilizado para formar un cuadrado cuyo lado tiene una longitud de 15 cm. Las piezas del tangram fueron construidas considerando los puntos medios de algunos segmentos.



Al calcular la diferencia entre la longitud del lado menor de la pieza triangular de mayor área y la longitud del lado menor de la pieza triangular de menor área, ¿qué tipo de número resulta?

¿A cuál de los siguientes propósitos de aprendizaje corresponde principalmente esta actividad?

- Efectúa operaciones con números irracionales.
- Diferencia los números racionales de los irracionales.
- Aproxima los números irracionales mediante los números racionales.

5. Un docente propone a los estudiantes de cuarto grado las siguientes tareas con números reales.
- **Tarea I.** Halla el conjunto solución en la siguiente inecuación: $2 + |x + 1| \leq 5$
 - **Tarea II.** Aplica el teorema de Pitágoras para ubicar el punto que corresponde a la expresión $2 + \sqrt{10}$ en la recta numérica, utilizando regla y compás.
 - **Tarea III.** Lee el siguiente enunciado: “La multiplicación de dos números irracionales siempre da por resultado otro número irracional”. ¿Es verdadero o falso? Explica.

¿Cuál de las tareas propuestas es de **mayor** demanda cognitiva?

- a) La tarea I.
- b) La tarea II.
- c) La tarea III.

Lea la siguiente situación y responda las preguntas 6 y 7.

Un docente planteó a los estudiantes de segundo grado la siguiente tarea:

Lee el siguiente enunciado:

“a y b son números racionales. Si a es un número positivo y b es un número negativo, entonces $(a - b)$ es un número positivo”.

Analiza si el enunciado es verdadero o falso, y explica por qué.

6. ¿Por qué la tarea propuesta es de **alta** demanda cognitiva?
- a) Porque la tarea requiere operar con números racionales, lo que implica un conocimiento más profundo de los conjuntos numéricos para validar el enunciado.
 - b) Porque la tarea requiere una abstracción, pues implica operar con expresiones literales y no con números específicos para validar el enunciado.
 - c) Porque la tarea exige analizar, mediante una estrategia, una expresión simbólica para validar el enunciado.

Ante la tarea planteada por el docente, la respuesta de un estudiante fue la siguiente: “Es falso porque no se puede saber si $(a - b)$ es un número positivo o negativo; depende de los valores que toman a y b”.

7. ¿Cuál de las siguientes alternativas explicaría el error del estudiante?
- a) Asocia las variables a y b únicamente con los números positivos y, por esta razón, no considera que, en este caso, $-b$ representa a un número positivo.
 - b) Desconoce las propiedades de las desigualdades para determinar si la expresión $(a - b)$ es mayor o menor que cero, razón por la cual no puede generalizar.
 - c) Considera que la sustracción siempre implica disminución, razón por la cual abre la posibilidad de que el resultado sea también negativo.

8. Una docente percibe que muchos estudiantes piensan que una fracción es un número que expresa una cantidad determinada de partes o elementos que se toman respecto de una unidad dividida en partes iguales.

Ante esto, la docente busca generar conflicto cognitivo en estos estudiantes. ¿Cuál de las siguientes preguntas es pertinente para ello?

- a) ¿Cómo explicarían el caso en el que se solicita determinar la relación entre una parte y la cantidad total de elementos del mismo conjunto, por ejemplo, la fracción que representa la cantidad de manzanas respecto de la cantidad de frutas de un cesto en el que hay manzanas y naranjas?
- b) ¿Cómo explicarían el caso en el que se solicita determinar la relación entre una y otra parte del mismo conjunto, por ejemplo, la fracción que representa la cantidad de varones respecto de la cantidad de mujeres de un aula?
- c) ¿Cómo explicarían el caso en el que se solicita determinar la relación entre las partes no tomadas y el total, por ejemplo, la fracción que representa la parte sobrante respecto de la barra completa de un chocolate?

9. En enero, una empresa inició sus actividades con cierta cantidad de personal contratado. En julio del mismo año, la empresa contrató a una cantidad adicional de personas igual a la mitad del total de los contratados en enero. Se sabe que, por apertura de una segunda sede de la empresa, al cabo de tres meses, la tercera parte del total de los trabajadores contratados ese año se trasladarán a esta nueva sede.

Con respecto a la cantidad de trabajadores que permanecerán en la primera sede, ¿cuál de las siguientes afirmaciones es correcta?

- a) La cantidad de trabajadores que se mantendrá será menor que la que se contrató en el mes de enero.
- b) La cantidad de trabajadores que se quedará será la misma que la que se contrató en el mes de enero.
- c) La cantidad de trabajadores que permanecerá será mayor que la que se contrató en el mes de enero.

10. Diego emprendió un negocio de venta de chompas elaboradas con lana de alpaca. Él compró cada chompa a S/ 200 y planeó venderlas con una ganancia del 40 % respecto al precio de compra. Al término de la temporada de invierno, Diego decidió aplicar un descuento del 25 % al precio de venta de cada chompa. ¿Cuánto fue el precio de venta de cada chompa después de aplicar ese descuento?

- a) S/ 230
- b) S/ 215
- c) S/ 210

11. Carmen tiene S/ 8000 y quiere colocarlos en el banco como depósito a plazo fijo durante 3 años. Para ello, evalúa la propuesta de dos bancos:

Banco 1

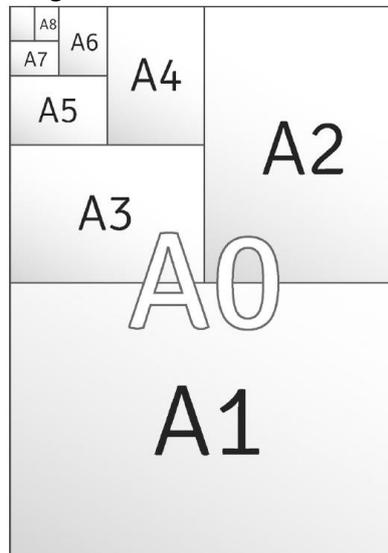
Abre una cuenta de ahorros con una tasa de interés simple anual de 9 %.

Banco 2

Abre una cuenta de ahorros con una tasa de interés compuesto anual de 8 %.

Si Carmen quiere obtener la mayor ganancia por su depósito en el plazo mencionado, ¿qué banco debería elegir? ¿Por qué?

- a) El Banco 1, porque obtendrá un mayor monto por concepto de interés en comparación con lo que obtendría en el Banco 2.
- b) El Banco 2, porque le ofrece una tasa de interés compuesto que siempre es mejor que una tasa de interés simple.
- c) Cualquiera de los dos bancos, porque obtendrá el mismo monto por interés al cabo de 3 años.
12. En 1922, se estableció la norma DIN 476 que estandarizó los tamaños de papel a ser adoptados por la industria. El sistema DIN determinó tres series básicas: A, B y C. En todas estas se cumple que hay una razón constante entre el largo y ancho de cada tipo de hoja. Así, en la serie A, se cumple que, al cortar la hoja por la mitad del lado más largo, cada una de sus mitades se convierte en el siguiente formato de la serie. Es decir, al cortar por la mitad una hoja del tipo A0, se obtienen dos hojas del tipo A1; al cortar por la mitad una hoja del tipo A1, se obtienen dos hojas del tipo A2, y así sucesivamente, tal como se observa en la siguiente imagen:



¿Cuál es la razón entre la medida del largo y la medida del ancho de cada formato de hoja?

- a) 2
- b) $\sqrt{3}$
- c) $\sqrt{2}$

15. Un docente planteó el siguiente problema a los estudiantes:

A partir de la expresión $S_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots + \frac{1}{2^n}$, efectúa lo siguiente:

- Encuentra S_1, S_2, S_3, S_4 y S_5 . Escribe cada valor como fracción.
- A partir de estos valores, plantea la fórmula del término general.

Un estudiante mostró al docente las siguientes respuestas:

- Los valores de S_1, S_2, S_3, S_4 y S_5 son $\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{7}{8}, \frac{15}{16}$ y $\frac{31}{32}$, respectivamente.
- La fórmula del término general es $S_n = \frac{n-1}{n}$

¿Cuál de las siguientes acciones es pertinente para retroalimentar al estudiante de modo que reflexione sobre su error al proponer la fórmula del término general?

- a) Pedirle que explique el significado de n en la fórmula del término general que ha indicado. Luego, preguntarle por la regla de formación que presentan los denominadores y cómo representaría el denominador del n -ésimo término. Finalmente, solicitarle que halle la relación entre ese denominador y su respectivo numerador.
- b) Pedirle que obtenga el sexto y séptimo término de la sucesión. Luego, indicarle que registre el incremento entre los correspondientes numeradores y denominadores de dos términos consecutivos de la sucesión. Finalmente, después de analizar los incrementos, solicitarle que determine la fórmula del término general.
- c) Pedirle que identifique la relación entre el numerador y el denominador en cada término de la sucesión. Luego, explicarle la regla de correspondencia que establece la fórmula del término general. Finalmente, solicitarle que realice la comprobación de la fórmula con cada término hallado.

16. Una docente planteó a los estudiantes resolver el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} 3y - x = 7 \\ 2x + 8 = 6y \end{cases}$$

Miguel, un estudiante, efectuó el siguiente desarrollo:

Método de sustitución

Como $3y - x = 7$, entonces

$$3y - 7 = x$$

Reemplazando x en $2x + 8 = 6y$

$$2(3y - 7) + 8 = 6y$$
$$6y - 14 + 8 = 6y$$
$$6y - 6y = 14 - 8$$
$$0 = 6$$

Solución: $x = 0; y = 6$

¿Cuál de las siguientes acciones pedagógicas es **más** pertinente para que Miguel reflexione sobre su error?

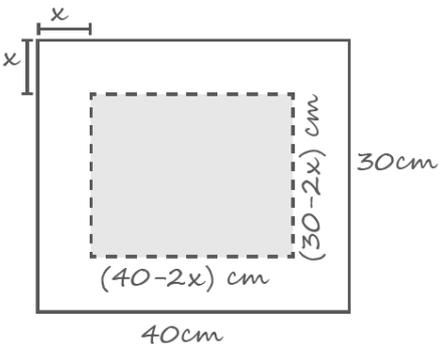
- Preguntarle: “¿Cuántas variables tiene el sistema? ¿Se aplicaron correctamente las propiedades de las ecuaciones?”. Luego, indicarle que copie su resolución en la pizarra para que, colaborativamente, sus compañeros participen en la resolución del sistema.
- Preguntarle: “¿El método de sustitución ha sido bien aplicado? ¿Has verificado las soluciones propuestas?”. Luego, indicarle que, si los valores hallados no verifican las igualdades, puede aplicar otro método de solución al sistema propuesto.
- Preguntarle: “¿Has verificado tu solución? ¿Todos los sistemas de ecuaciones tienen una única solución? ¿Puede haber sistemas con infinitas soluciones? ¿Habría algún sistema que no tiene solución? ¿Cómo lo reconocerías?”.

17. Una docente tiene como propósito que los estudiantes de tercer grado resuelvan problemas que involucran ecuaciones cuadráticas. Para ello, les propuso el siguiente problema:

Roberto tiene un cartón de forma rectangular cuyas dimensiones son 30 cm y 40 cm. Él desea obtener un marco cuya área sea igual a la mitad del área del cartón. Además, la medida del ancho de este marco debe ser constante.

¿Cuál será la medida del ancho del marco?

Uno de los estudiantes presentó la siguiente resolución:



Como el área del marco y de la parte interna del cartón son iguales, entonces se concluye lo siguiente:

$$(40 - 2x)(30 - 2x) = 600$$
$$1200 - 60x - 80x + 4x^2 = 600$$
$$4x^2 - 140x = 600 - 1200$$
$$x^2 - 35x = -150$$
$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$
$$x = \frac{35 \pm \sqrt{1225 - 600}}{2}$$
$$x_1 = 30 \text{ o } x_2 = 5$$

Respuesta: El ancho puede ser 5 cm o 30 cm.

¿Cuál de las siguientes alternativas expresa el error que se evidencia en la resolución del estudiante?

- Aplica la fórmula para encontrar las raíces de una ecuación cuadrática cuando es posible hallarlas mediante la factorización por aspa simple.
- Incluye en su respuesta a una de las raíces de la ecuación cuadrática, la cual carece de sentido en el contexto del problema planteado.
- Determina las raíces a partir de una ecuación cuadrática sin haberla transformado previamente a la forma $ax^2 + bx + c = 0$.

18. Una docente presenta a los estudiantes la siguiente situación:

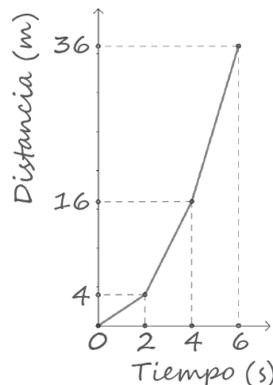
En una empresa de juguetes, al realizar una prueba de uno de los modelos de carritos a batería, se observa que el vehículo aumenta su velocidad en 2 m/s en cada segundo. En la siguiente tabla, se han colocado algunos datos al respecto.

Tiempo (s)	Velocidad (m/s)	Distancia recorrida (m)
0	0	0
2	4	4
4	8	16
6	12	36

¿Cuál sería la representación gráfica que relaciona la distancia recorrida y el tiempo?

A continuación, se muestra la respuesta de un estudiante:

La distancia y el tiempo no pueden ser números negativos. Con los puntos registrados, la gráfica sería la siguiente:



¿Cuál de las siguientes acciones es **más** pertinente para retroalimentar al estudiante, de modo que reflexione sobre el error en su respuesta?

- Pedirle que vuelva a analizar los valores de dicha tabla y preguntarle lo siguiente: “¿Se utilizaron los valores de la velocidad en la gráfica?; si el valor de la distancia recorrida es igual al cuadrado del valor correspondiente al tiempo, ¿qué tipo de función es y cómo debería ser su gráfica?”.
- Pedirle que encuentre la regla de correspondencia entre la distancia recorrida y el tiempo. Después, solicitarle que represente algebraicamente la función y que la clasifique. Finalmente, indicarle que determine el dominio y el rango, y los verifique en la gráfica que realizó inicialmente.
- Preguntarle: “¿Es suficiente tomar en cuenta solo los valores del tiempo registrados en la tabla?, ¿qué ocurriría si se considerasen otros números enteros comprendidos entre ellos? Por otro lado, si consideras valores más cercanos entre sí para el tiempo, ¿cómo sería la gráfica?”.

19. Una docente desarrolla una sesión de aprendizaje cuyo propósito es lograr que los estudiantes representen e interpreten la gráfica de funciones cuadráticas. Para ello, realiza un seguimiento a la labor de los estudiantes de graficar la función cuadrática $f(x) = x^2$; luego, les pide que la describan. Después, monitorea el análisis del desplazamiento de la gráfica de acuerdo con determinados parámetros, para lo cual grafican las funciones $g(x) = x^2 - 1$; $h(x) = (x + 1)^2$. Luego, la docente les propone a los estudiantes las siguientes tareas adicionales. ¿Cuál de ellas es de mayor demanda cognitiva?
- Identificar el vértice y los puntos de intersección de la gráfica de $f(x) = x^2 - 2x + 1$ con cada uno de los ejes coordenados.
 - Describir cómo debe desplazarse la gráfica de la función $f(x) = x^2$ para que, en la nueva gráfica, el vértice sea $(2; -5)$. Luego, representarla simbólicamente.
 - Representar simbólicamente la función cuadrática que se ha desplazado horizontalmente $5\sqrt{2}$ unidades hacia la derecha, respecto de la función de forma $f(x) = x^2$.
20. Una docente preguntó a los estudiantes cómo obtener las raíces de una ecuación cuadrática. Uno de los estudiantes respondió: “Hay varias formas. Una de ellas, consiste en representar gráficamente la función cuadrática asociada a la ecuación y para obtener las raíces, siempre hay que apelar a los puntos de intersección de la gráfica de la parábola y el eje X, dado que las abscisas de esos puntos corresponderían a las raíces de la ecuación cuadrática”.
¿Cuál de las siguientes preguntas promueve la generación de conflicto cognitivo en este estudiante?
- ¿Cómo explicarías la obtención de las raíces de una ecuación cuadrática asociada a la función $f(x) = x^2 + 2$?
 - ¿Cómo explicarías la obtención de las raíces de una ecuación cuadrática asociada a la función $f(x) = -x^2 + 4$?
 - ¿Cómo explicarías la obtención de las raíces de una ecuación cuadrática asociada a la función $f(x) = x^2 + 4x + 3$?