GRUPO
DOCENTE PERÚ
ALCANZANDO EL ÉXITO

MATEMÁTICA

PREPARACIÓN

EXAMEN DE ASCENSO 2023

MATEMÁTICA: CASUÍSTICA

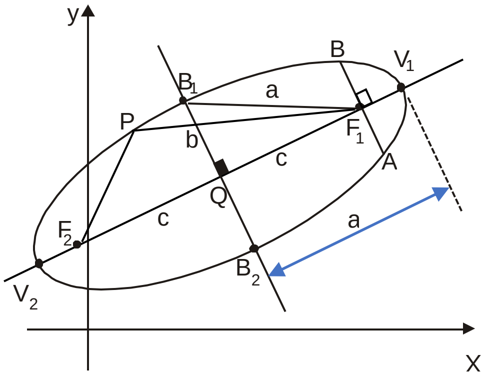
Competencia: Resuelve problemas de forma, movimiento y localización.

Temas: Geometría Analítica: Ecuación de la elipse.

LA ELIPSE

Definición: Es el lugar geométrico de todos los puntos contenidos en un mismo plano tal que las sumas de las distancias de cualquier punto de la elipse a 2 puntos fijos es constante e igual al diámetro mayor; los puntos fijos se denominan focos. $d_{\overline{PF_1}} + d_{\overline{PF_2}} = 2a$.

(2a): Es constante.



$$\boxed{a^2 = b^2 + c^2}$$

Donde se cumple:

a) F_1 ; F_2 Focos de la elipse

b) $d_{\overline{PF_1}} + d_{\overline{PF_2}} = 2a$

c) $\overline{F_1F_2} = 2c$ Distancia focal

d) V_1 ; V_2 : Vértices $\rightarrow \overline{V_1V_2}$ = eje mayor
Eje mayor = 2a

e) $AB = \dfrac{2b^2}{a}$: Lado recto

f) Q = Centro

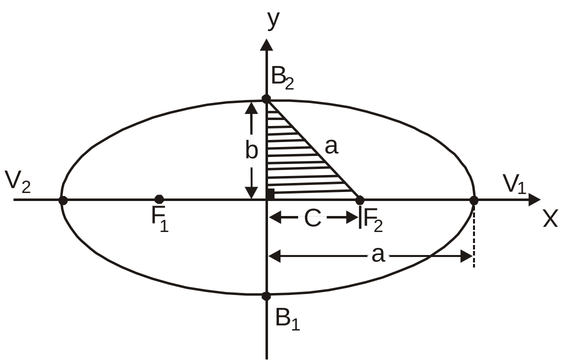
g) $\overline{B_1B_2} = 2b$ Eje menor

Interactúa con la elipse en Geogebra

https://www.geogebra.org/m/swrb8gnp

Casos Generales de la Elipse:

I) Elipse Horizontal:



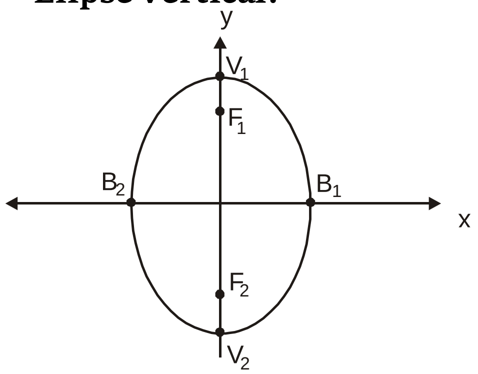
Esta es la ecuación cuando el centro de la elipse está en el origen:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Si el centro fuera (h ; k) , entonces la ecuación es:

$$\boxed{\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1}$$

II) Elipse Vertical:



$$\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1 \quad \text{donde} \quad a>b$$

Cuando el centro fuera (h ; k) la ecuación es: $\dfrac{(x-h)^2}{b^2}+\dfrac{(y-k)^2}{a^2}=1$ donde $a > b$

Recuerda: Que cuando el denominador de x^2 ó $(x-h)^2$ es mayor que el que el denominador de y^2 ó $(y-k)^2$ entonces la Elipse es horizontal; y en el caso contrario es vertical.

Ej.

$\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1 \Rightarrow \text{Elipse horizontal}$ $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{16}=1 \Rightarrow \text{Elipse vertical}$

Excentricidad de la elipse:

Es un número que mide el mayor o menor achatamiento de la elipse. Y es igual al cociente entre su semidistancia focal y su semieje mayor.

$e=\dfrac{c}{a}$ donde $c \le a$ y $0 \le e \le 1$

PROBLEMAS SOBRE ECUACIÓN DE LA ELIPSE

1. Una docente tiene como propósito que sus estudiantes comprendan el proceso de construcción de la ecuación de una elipse a partir del reconocimiento de la forma cómo se genera su construcción. Para el efecto les propone el siguiente problema:

   Los vértices de una elipse son (-5; 3) y (13; 3) y los focos (-2; 3) y (10; 3). Halla la ecuación que modele a la elipse respectiva.

   Los estudiantes, organizados en grupos de tres alumnos cada uno, resolvieron el problema. Luego tres de los grupos expusieron sus procesos y respuestas así:

   Grupo 1: Los estudiantes hallaron el punto central de la elipse (4;3), luego calcularon las distancias del centro a un vértice y a un foco, obteniendo a = 9 y c = 7 respectivamente. Aplican el teorema de Pitágoras y calculan $b^2 = 9^2 - 7^2 = 45$ finalmente construyen la ecuación de la elipse: $\dfrac{(x-4)^2}{81}+\dfrac{(y-3)^2}{45}=1$

   Grupo 2: Los estudiantes hallaron la distancia entre los vértices: 2a = 13 – -5 = 18 y afirman que esta es la suma constante de las distancias que hay desde los focos a cualquier punto de la elipse. Finalmente construyen una ecuación de la elipse:

   $$\sqrt{(x+2)^2+(y-3)^2}+\sqrt{(x-10)^2+(y-3)^2}=18$$

   Grupo 3: Los estudiantes hallaron el punto central de la elipse (4;3), luego calcularon las distancias del centro a un vértice y a un foco, obteniendo a = 9 y c = 7 respectivamente.

Aplican el teorema de Pitágoras y calculan $b^2 = 9^2 - 7^2 = 45$ finalmente construyen la ecuación de la elipse: $45(x-4)^2 + 81(y-3)^2 = 3645$

¿Cuál de los grupos cumple con el propósito planeado por el docente?

a) Grupo 1
b) Grupo 2
c) Grupo 3

2. Halla la ecuación de una elipse de vértices (1,-6) y (9,-6) y de lado recto 4,5.

a) $\frac{(x-5)^2}{9} + \frac{(y+6)^2}{7} = 1$
b) $\frac{(x+5)^2}{9} + \frac{(y-6)^2}{7} = 1$
c) $\frac{(x+5)^2}{7} + \frac{(y-6)^2}{9} = 1$

3. Las coordenadas del punto de intersección de la elipse: $9x^2+25y^2=225$ y la parábola $9x^2=125(y-1)$, son:

a) $\left(\frac{-7\sqrt{5}}{3};\right)$ y $\left(\frac{7\sqrt{5}}{3};2\right)$
b) $\left(\frac{-2\sqrt{5}}{3};2\right)$ y $\left(\frac{2\sqrt{5}}{3};\right)$
c) $\left(\frac{-5\sqrt{5}}{3};2\right)$ y $\left(\frac{5\sqrt{5}}{3};2\right)$

4. En una prueba escrita, un docente debe elaborar una pregunta que corresponda al siguiente indicador: "Identifica una sección cónica a partir del reconocimiento de atributos específicos que la definen".

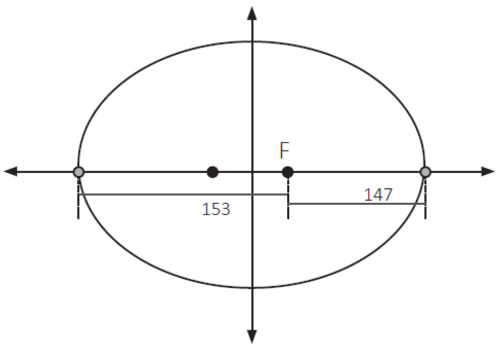
¿Cuál de las siguientes preguntas es **<u>más</u>** pertinente para ese propósito?

a) ¿Cuál es la cónica que se forma al intersectar un cono circular recto con un plano no perpendicular al eje y no paralelo ni a la generatriz ni al eje de dicho cono?
b) ¿Cuál es la cónica que corresponde a la siguiente ecuación: $\frac{(x-6)^2}{25} + \frac{(y-4)^2}{9} = 1$?
c) ¿Cuál es la cónica conformada por los puntos del plano que cuya suma de distancias a los puntos fijos (2; 4) y (10; 4) es igual a 10?

5. ¿Cuál de las siguientes tareas es de **mayor** demanda cognitiva?
a) En una elipse con centro en (-2; 3), uno de sus focos es (6;3) y el vértice (n;3), halle el valor de n de modo que su excentricidad sea 0,8 y luego escriba la ecuación respectiva.
b) En la ecuación de la elipse $\frac{(x+2)^2}{100} + \frac{(y-3)^2}{36} = 1$ halla las coordenadas del centro y la medida de su excentricidad.

c) Escriba la ecuación de una elipse con centro en (-2; 3), donde el eje mayor mide 20 u, y el eje menor 12, sabiendo que el eje focal es paralelo al eje x.

6. Durante una sesión de aprendizaje los estudiantes resuelven problemas que involucran elipses. A continuación, se muestra una parte de la resolución que realizó una estudiante.



El eje mayor mide $2a$ y la distancia entre los focos es $2c$. Luego:

$a + c = 153$

$a - c = 147$

Entonces $a = 150$ y $c = 3$

Respuesta: La distancia entre el centro de la elipse y uno de sus focos es 3 unidades.

Tomando en cuenta que la estudiante resolvió de forma adecuada el problema, ¿qué se puede afirmar de su proceso de resolución?

a) Consideró una elipse que tiene como uno de sus focos el punto (a - c; 0).
b) Consideró una elipse con un eje mayor que tiene como uno de sus extremos el punto (-a; 0).
c) Consideró una elipse con un eje menor que tiene como uno de sus extremos el punto (-c; 0).