

MATEMÁTICA: CASUÍSTICA

Temas: Ecuaciones y función cuadrática

EJERCICIO #1:

Una docente planteó a los estudiantes resolver el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} 3y - x = 7 \\ 2x + 8 = 6y \end{cases}$$

Miguel, un estudiante, efectuó el siguiente desarrollo:

Método de sustitución
Como $3y - x = 7$, entonces
 $3y - 7 = x$
Reemplazando x en $2x + 8 = 6y$
 $2(3y - 7) + 8 = 6y$
 $6y - 14 + 8 = 6y$
 $6y - 6y = 14 - 8$
 $0 = 6$
Solución: $x = 0; y = 6$

¿Cuál de las siguientes acciones pedagógicas es **más** pertinente para que Miguel reflexione sobre su error?

- Preguntarle: “¿Cuántas variables tiene el sistema? ¿Se aplicaron correctamente las propiedades de las ecuaciones?”. Luego, indicarle que copie su resolución en la pizarra para que, colaborativamente, sus compañeros participen en la resolución del sistema.
- Preguntarle: “¿El método de sustitución ha sido bien aplicado? ¿Has verificado las soluciones propuestas?”. Luego, indicarle que, si los valores hallados no verifican las igualdades, puede aplicar otro método de solución al sistema propuesto.
- Preguntarle: “¿Has verificado tu solución? ¿Todos los sistemas de ecuaciones tienen una única solución? ¿Puede haber sistemas con infinitas soluciones? ¿Habrá algún sistema que no tiene solución? ¿Cómo lo reconocerías?”.

EJERCICIO #2:

¿Cuál de los siguientes procedimientos **NO** presenta errores al operar con expresiones algebraicas?

a) Si $a_n = 7(h + 1) + 3$, entonces $a_{n+1} = 7(h + 1 + 1) + 3$

$$\Rightarrow a_{n+1} = 7(h + 2) + 3$$

$$\Rightarrow a_{n+1} = 7h + 5$$

b) Al resolver la ecuación $\frac{x}{2} - 4 = \frac{x-1}{2} - \frac{7}{2}$

$$\Rightarrow \frac{x}{2} - \frac{x-1}{2} = 4 - \frac{7}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{x - x + 1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{1}{2},$$

se concluye que tiene infinitas soluciones.

c) Al desarrollar $F = \frac{1}{3}(m + 1)(4m + 3)$, resulta lo siguiente:

$$F = \frac{1}{3}m + \frac{1}{3}(4m + 3)$$

$$F = \frac{1}{3}m + \frac{4}{3}m + 1$$

$$F = \frac{5}{3}m + 1$$

EJERCICIO #3:

Se quiere construir una caja, sin tapa, cuya base y caras laterales sean rectangulares. Para ello, se utilizará una lámina de cartón rectangular cuyas dimensiones son de 30 cm y 20 cm.

El primer paso para la construcción de la caja será recortar cuadrados de lado "x" en las esquinas y, luego, se doblarán los lados hacia arriba.

¿Cuál de las siguientes expresiones representa el área de la base de la caja en centímetros cuadrados?

a) $A(x) = 600 - 100x + 4x^2$

b) $A(x) = 600 - 50x + x^2$

c) $A(x) = 600 - 4x^2$

EJERCICIO #4:

La función $f(x) = x^2$ y la función $g(x) = (x - 2)^2 + 1$ fueron representadas gráficamente en el mismo plano de coordenadas mediante parábolas.

¿Cuál de las siguientes afirmaciones expresa la relación entre los vértices de estas parábolas?

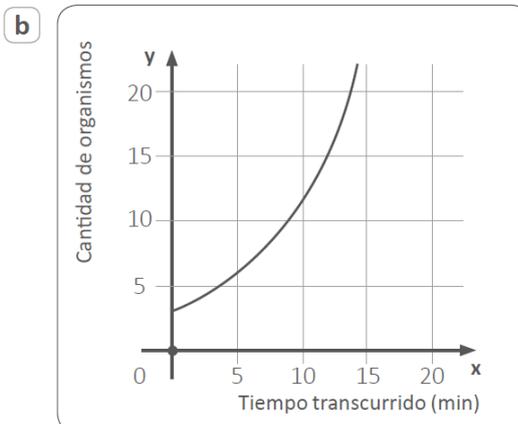
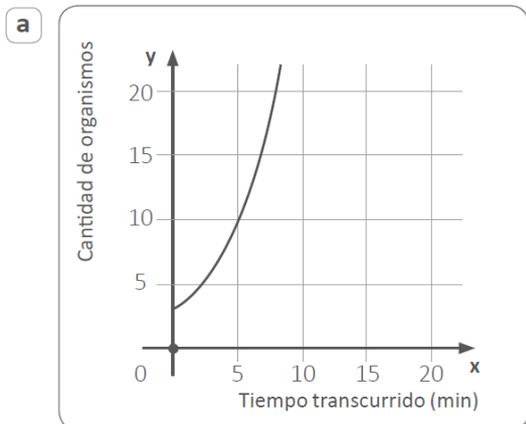
a) El vértice de la parábola que representa a $g(x) = (x - 2)^2 + 1$ se ubica a 2 unidades a la derecha y 1 unidad hacia arriba del vértice de la parábola que representa a $f(x) = x^2$.

b) El vértice de la parábola que representa a $g(x) = (x - 2)^2 + 1$ se ubica a 2 unidades a la derecha y 1 unidad hacia abajo del vértice de la parábola que representa a $f(x) = x^2$.

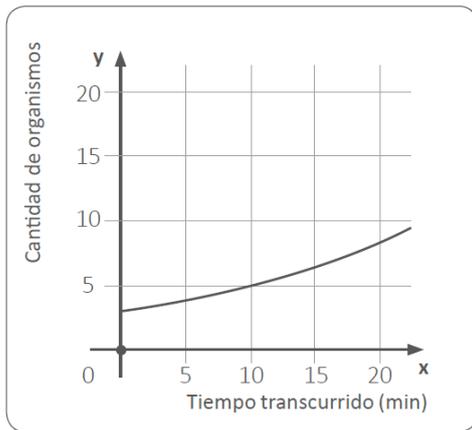
c) El vértice de la parábola que representa a $g(x) = (x - 2)^2 + 1$ se ubica a 2 unidades a la izquierda y 1 unidad hacia arriba del vértice de la parábola que representa a $f(x) = x^2$.

EJERCICIO #5:

Existen organismos unicelulares que se reproducen duplicándose. En un laboratorio y bajo condiciones óptimas, un tipo de organismo unicelular se duplica cada 5 minutos. Si había 3 de ellos cuando se empezó a realizar la observación, ¿cuál de las siguientes gráficas representa la función que modela la cantidad de organismos unicelulares en relación con el tiempo transcurrido en minutos?



c



EJERCICIO #6:

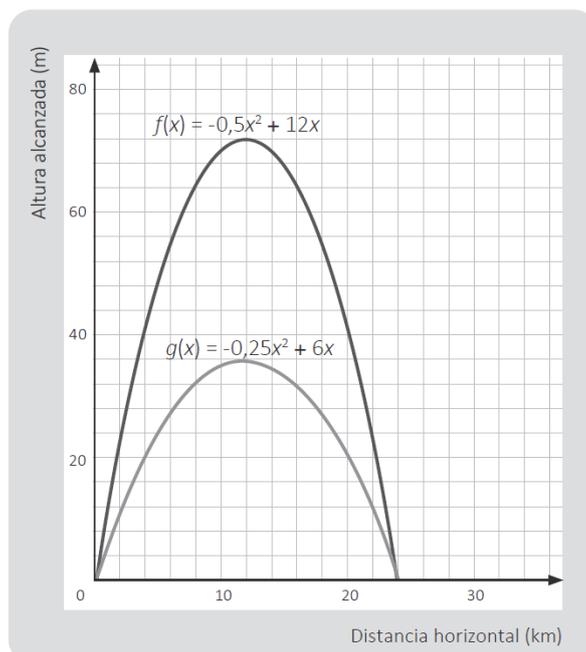
Una docente desarrolla una sesión de aprendizaje cuyo propósito es lograr que los estudiantes representen e interpreten la gráfica de funciones cuadráticas. Para ello, realiza un seguimiento a la labor de los estudiantes de graficar la función cuadrática $f(x) = x^2$; luego, les pide que la describan. Después, monitorea el análisis del desplazamiento de la gráfica de acuerdo con determinados parámetros, para lo cual grafican las funciones $g(x) = x^2 - 1$; $h(x) = (x + 1)^2$.

Luego, la docente les propone a los estudiantes las siguientes tareas adicionales. ¿Cuál de ellas es de mayor demanda cognitiva?

- Identificar el vértice y los puntos de intersección de la gráfica de $f(x) = x^2 - 2x + 1$ con cada uno de los ejes coordenados.
- Describir cómo debe desplazarse la gráfica de la función $f(x) = x^2$ para que, en la nueva gráfica, el vértice sea $(2; -5)$. Luego, representarla simbólicamente.
- Representar simbólicamente la función cuadrática que se ha desplazado horizontalmente $5\sqrt{2}$ unidades hacia la derecha, respecto de la función de forma $f(x) = x^2$.

EJERCICIO #7:

Dos docentes de Matemática, Vicente y Mariana, elaboran propuestas de actividades para promover la comprensión de las funciones cuadráticas por los estudiantes de tercer grado. Como parte de una actividad, Mariana le muestra la representación de las trayectorias de dos proyectiles.



A partir de esta representación, Vicente propone tres tareas. ¿Cuál de ellas es de **mayor** demanda cognitiva?

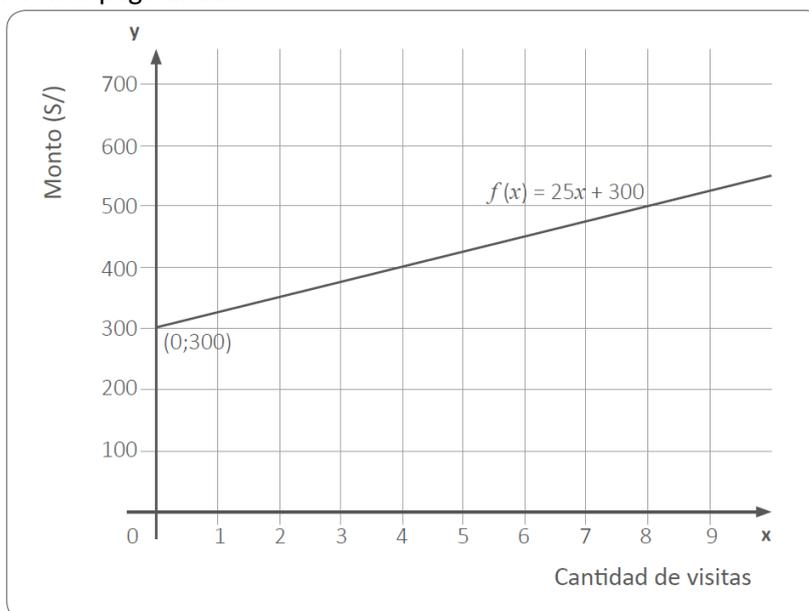
- ¿Cuál es la relación de las alturas de ambos proyectiles cuando han recorrido la misma distancia horizontal?
- ¿Qué tipo de función representan las gráficas de la trayectoria desarrollada por los proyectiles?
- ¿Cuánto es el valor máximo de la altura alcanzada por cada uno de los proyectiles?

EJERCICIO #8:

Un docente les presentó a sus estudiantes la siguiente situación:

Un club campestre cobra 40 soles por la entrada de un adulto y 20 soles por la de un niño menor de 12 años. Sin embargo, si una persona realiza un pago anual de 300 soles, podrá ingresar con su cónyuge e hijos menores de 18 años, pagando solo el 25% del importe de cada entrada, además de tener otros beneficios.

La siguiente gráfica representa la función que modela el monto a pagar en relación con la cantidad de visitas de una familia compuesta por una pareja de esposos y su hijo de 8 años, sabiendo que hicieron el pago anual.



El docente tiene como propósito que sus estudiantes interpreten la pendiente de la gráfica de una función afín.

¿Cuál de las siguientes acciones pedagógicas promueve el logro de este propósito?

- Solicitar que identifiquen las magnitudes que se están relacionando y preguntar por el monto total, en soles, que resulta de realizar 1, 2 y 3 visitas. Luego, pedir que digan en cuánto aumentará el monto por cada visita que realizará esta familia.
- Solicitar que identifiquen dos puntos de la recta. Luego, pedir que resten las ordenadas de ambos puntos y también sus abscisas para luego dividir ambos resultados. Finalmente, pedir que reconozcan ese cociente en la expresión algebraica $f(x) = 25x + 300$.
- Solicitar que resalten la expresión algebraica y que identifiquen el valor que representa la pendiente de la recta y su intercepto con el eje "y". Luego, pedir que reemplacen valores en esta expresión para calcular el monto que corresponde para 10, 30 y 70 visitas.

EJERCICIO #9:

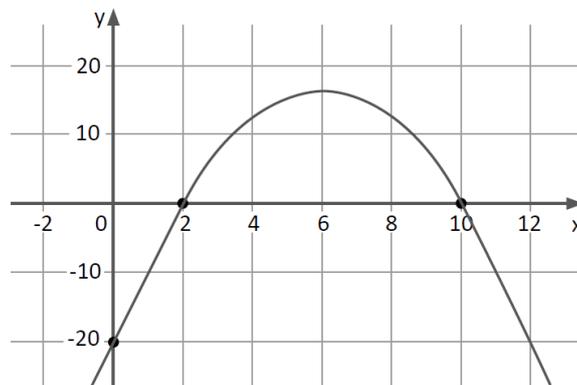
¿Cuál de las siguientes tareas involucra el uso de una función periódica?

- Representar gráficamente la secuencia de pasos de la coreografía en la que una persona repite tres veces los siguientes movimientos: con las manos arriba girar a la derecha, ponerse en cuclillas y saltar impulsándose hacia arriba.
- Representar gráficamente la relación entre la distancia recorrida y el tiempo transcurrido durante los primeros 10 minutos en una carrera en la que un maratonista corre a razón de 200 m/min sobre una pista atlética de 400 m de longitud, que está ubicada alrededor de un campo de fútbol.
- Representar gráficamente la relación entre la distancia que separa a un empresario de la ciudad A cuando viaja continuamente a la ciudad B o viceversa, y el tiempo transcurrido, sabiendo que demora 1 día en trasladarse de una ciudad a otra y permanece 5 días en cada ciudad.

EJERCICIO #10:

Un docente tiene como propósito evaluar el logro del siguiente desempeño: "Justifica si un gráfico corresponde a una función cuadrática dada". Para ello selecciona la siguiente tarea:

¿El siguiente gráfico corresponde a la función f cuya expresión algebraica es $f(x) = -x^2 + 12x - 20$? ¿Por qué?



Para evaluar las respuestas de los estudiantes, el docente ha elaborado la siguiente rúbrica con las descripciones de los niveles Previo al inicio, En inicio, En proceso y Logrado.

Previo al inicio	En inicio	En proceso	Logrado
No reconoce que la gráfica corresponde a la función dada.	Reconoce que el gráfico sí corresponde a la función y expresa puntos explícitos de la gráfica.	Reconoce que el gráfico sí corresponde a la función y expresa puntos explícitos de la gráfica relacionándolos con la expresión algebraica de la función.	Reconoce que el gráfico sí corresponde a la función y expresa puntos explícitos de la gráfica, así como características propias de esta, estableciendo relaciones con la expresión algebraica de la función.

Un estudiante respondió lo siguiente: "Sí, porque como el coeficiente de x^2 es negativo, la parábola se abre hacia abajo. Además, cuando x es 0, y vale -20; y cuando y es 0, x vale 2 o 10".

A partir de la rúbrica presentada, ¿cuál es el nivel de logro alcanzado por este estudiante?

- En inicio
- En Proceso
- Logrado

EJERCICIO #11:

¿Cuál de las siguientes alternativas presenta un procedimiento correcto para determinar las coordenadas del vértice en la representación gráfica de una función cuadrática?

- Identificar los valores de A, B y C en la función $f(x) = Ax^2 + Bx + C$ para determinar el valor de la abscisa del vértice a partir de la expresión $-\frac{B}{2A}$ y la ordenada mediante el valor numérico de $f\left(-\frac{B}{2A}\right)$
- Elaborar una tabla para el valor de x , considerando números negativos, cero y números positivos. Luego de evaluar estos valores en $f(x)$, considerar como abscisa del vértice el valor de x cuando $f(x) = 0$ y como ordenada, cero.
- Encontrar la forma canónica de la función cuadrática dada por $f(x) = (x - h)^2 + k$. A partir de ello, considerar h como la cantidad de unidades que debe desplazarse el vértice de la parábola desde el origen de coordenadas en sentido vertical y k , en sentido horizontal.

EJERCICIO #12:

Se cerca un área rectangular a la orilla de un río y no se requiere cercar la parte del terreno que colinda con el río. El costo del material para cercar el lado paralelo al río es de 12 soles por metro lineal, 8 soles por metro lineal para los lados laterales y se calcula que se necesita 3 600 soles para cercar el terreno. Si x metros es la longitud de uno de los lados laterales entonces el área expresada en función de x es:

- $x(600 - 4x)$
- $x\left(300 - \frac{4}{3}x\right)$
- $\frac{4}{3}x(900 - x)$