MATEMÁTICA: CASUÍSTICA

COMPETENCIA: Resuelve problemas de regularidad, equivalencia y cambio.

Temas: Ecuaciones e inecuaciones.

EJERCICIO #1:

Una docente ha seleccionado tres tareas que involucran ecuaciones lineales.

I. A las 15:00 h, el auto P y el auto Q distan entre sí 280 km a lo largo de una carretera. Estos autos se dirigen el uno hacia el otro con velocidades constantes de 30 km/h y 40 km/h, respectivamente. ¿A qué hora se encontrarán?

II. Dadas las siguientes relaciones definidas en el conjunto de números enteros:
   $a + 10b = 40$
   $23c - 4d = 11$
   $13e + 6f = 136$

   Obtén una solución de $[a+b-(c \times d)]^{\frac{e}{f}}$.

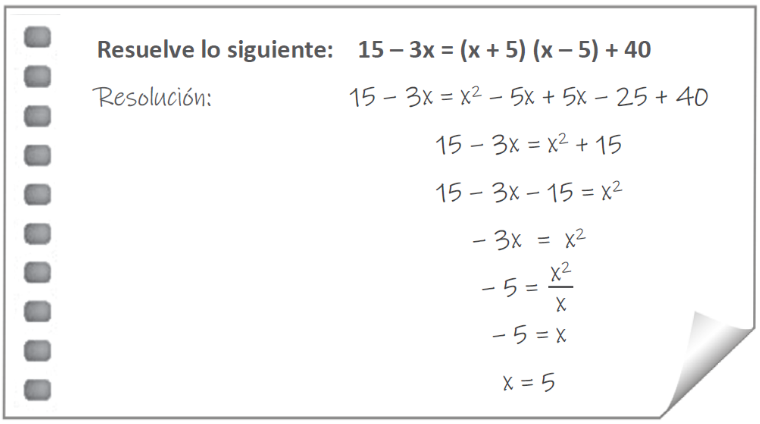
III. Una impresora utiliza tres cartuchos con igual capacidad de tinta negra, roja y azul. Por intensidad de uso, los cartuchos de tinta negra se cambian 4 veces más que los de tinta roja. A su vez, en el tiempo en que se acaban 3 cartuchos de tinta roja, se agotan 5 de color azul. Al contar todos los cartuchos utilizados, se obtuvo 200. ¿Cuántos cartuchos fueron de color azul?

¿Cuál de las tareas es de mayor demanda cognitiva?

a) La tarea I.
b) La tarea II.
c) La tarea III.

EJERCICIO #2:

Observe la resolución de una ecuación cuadrática realizada por un estudiante.



El procedimiento seguido muestra errores. ¿Cuál es el principal error que se evidencia en la resolución del estudiante?

a) Incurre en un error de transcripción al reemplazar –3 por –5, que lo conduce a un resultado erróneo.
b) Opera la incógnita como si fuera una constante y no considera todos los posibles valores que puede tomar.
c) Prescinde del signo negativo en el resultado final, posiblemente por asociarlo al cambio de signo de un número que se traslada de un miembro a otro.

EJERCICIO #3:

Una docente presenta la siguiente situación a los estudiantes de tercer grado.
En cierto taller de confecciones, se producen “x” buzos deportivos con un costo total de “200 + 5x” soles. Se ha establecido que el precio de venta de cada buzo deportivo sea “225 – 5x” soles. ¿Cuántos buzos deportivos deberán venderse para que la ganancia sea 1500 soles?

EJERCICIO #4:

La docente pide a los estudiantes que expresen la situación propuesta mediante una ecuación.

¿Cuál de los siguientes indicadores de evaluación se corresponde con lo solicitado por la docente?

a) Expresa lo que comprende sobre el significado de ecuaciones cuadráticas.
b) Describe el procedimiento realizado para resolver ecuaciones cuadráticas.
c) Representa simbólicamente situaciones empleando ecuaciones cuadráticas.

EJERCICIO #5:

La docente tiene como propósito que los estudiantes obtengan e interpreten la respuesta que resuelve la situación. Para evaluar el desempeño, ha elaborado una rúbrica con las descripciones de los niveles “En inicio”, “En proceso” y “Satisfactorio”.

En inicio	En proceso	Satisfactorio
Expresa correctamente alguna relación entre datos y variables tomados de la situación propuesta.	Expresa una representación simbólica que modela correctamente la situación y presenta un avance parcial del procedimiento de resolución de la ecuación.	Expresa correctamente la representación simbólica que modela la situación, resuelve la ecuación e interpreta el conjunto solución en el contexto de la situación propuesta.

Un estudiante presenta la siguiente resolución como respuesta al problema.

x: cantidad de buzos deportivos

$$(225 - 5x)x - (200 + 5x) = 1500$$
$$225x - 5x^2 - 200 - 5x = 1500$$
$$-5x^2 + 220x - 1700 = 0$$
$$5x^2 - 220x + 1700 = 0$$
$$x^2 - 44x + 340 = 0$$
$$(x - 34)(x - 10) = 0$$

Considerando la rúbrica presentada, ¿cuál es el nivel de logro alcanzado por el estudiante?

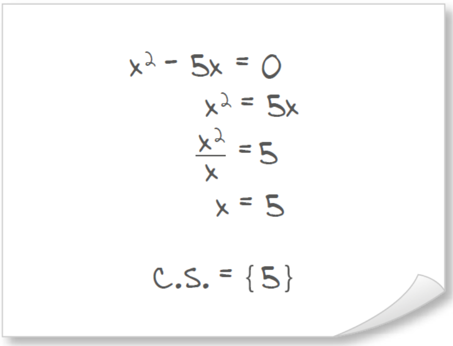
a) En inicio.
b) En proceso.
c) Satisfactorio.

EJERCICIO #6:

Un docente propuso a sus estudiantes la siguiente tarea:

Determina el conjunto solución de la siguiente ecuación: $x^2 - 5x = 0$

A continuación, el docente monitorea el trabajo de los estudiantes, y se detiene a observar la resolución de uno de ellos.



El docente busca retroalimentar al estudiante para que reflexione sobre el error en el que incurrió. ¿Cuál de las siguientes acciones pedagógicas es la **más** pertinente para conseguir este propósito?

a) Preguntarle: “Si reemplazas la incógnita con el cero, ¿se comprueba la ecuación cuadrática? ¿El cero será otra solución de la ecuación? ¿Por qué? ¿Qué número deberás incluir en el conjunto solución encontrado?”.

b) Preguntarle: “Si factorizamos la expresión $x^2 – 5x$, ¿cuáles son los factores que se obtienen? ¿Qué valores para la incógnita se obtienen al igualar cada factor a cero? ¿Cuáles serán, entonces, las raíces del conjunto solución?”.

c) Preguntarle: “Si una incógnita se caracteriza por representar un valor desconocido, ¿hay alguna condición, en esta ecuación, que indique que la incógnita no pueda tomar el valor de cero? ¿Es correcto dividir x^2 entre la incógnita cuando esta podría ser cero? ¿Crees que estás descartando ese valor al hacer la división? ¿Por qué?”.

EJERCICIO #7:

Un docente presentó a sus estudiantes el siguiente problema:

¿Cuál es el conjunto solución de la ecuación $(x + 3)^2 = 144$, sabiendo que $x \in Q$?

Un estudiante respondió que si extrae la raíz cuadrada a ambos miembros obtiene la ecuación x + 3 = 12 y, por tanto, el C.S. = {9}.

¿Cuál de las siguientes preguntas es pertinente para generar conflicto cognitivo en el estudiante?

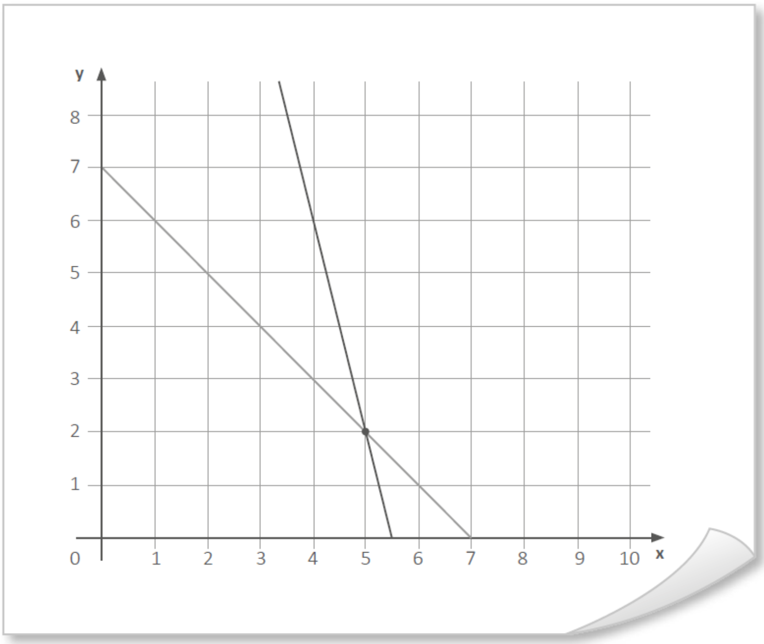
a) Si reemplazas en la ecuación la variable “x” por -15, ¿se verifica la igualdad?¿-15 también será parte del conjunto solución? ¿9 será el único valor que cumple la igualdad?

b) Si revisas tu procedimiento, ¿cómo obtuviste la ecuación x + 3 = 12? ¿Podrías explicar cómo obtuviste 9 en el conjunto solución? ¿Será correcto el resultado que has encontrado?

c) Si comparas una ecuación lineal y una ecuación cuadrática, ¿qué características tienen en común? ¿Cuál es el grado en cada ecuación? ¿Qué se entiende por ecuación lineal y por ecuación cuadrática?

EJERCICIO #8:
Vilma está resolviendo un problema. Ella ha decidido modelar el problema mediante un sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas y ha graficado dicho sistema de ecuaciones.

A continuación, se muestra el gráfico realizado por Vilma.



Se sabe que el procedimiento realizado por Vilma es correcto, ¿cuál de los siguientes problemas podría ser el que está resolviendo Vilma?

a) Una familia compuesta por 7 integrantes, entre niños y adultos, ingresa a una feria. Ellos pagan 2 soles por la entrada de un niño y 8 soles por la de un adulto. Si en entradas gastaron 26 soles, ¿cuántos niños y cuántos adultos conforman esta familia?
b) En una prueba de 10 preguntas, se otorga 8 puntos por respuesta correcta, 0 puntos por respuesta omitida y se resta 2 puntos por respuesta incorrecta. Si José respondió 7 preguntas y obtuvo 36 puntos, ¿cuántas repuestas correctas e incorrectas tuvo?
c) En un almacén, se guardan carritos de jardinería (4 ruedas) y carretillas (1 rueda). Si se cuentan en total 7 vehículos de trabajo entre carritos de jardinería y carretillas, y un total de 22 ruedas, ¿cuántos carritos de jardinería y cuántas carretillas están guardados en este almacén?

EJERCICIO #9:
Un docente propone a los estudiantes de cuarto grado las siguientes tareas con números reales.

- Tarea I. Halla el conjunto solución en la siguiente inecuación: $2 + |x + 1| \leq 5$
- Tarea II. Aplica el teorema de Pitágoras para ubicar el punto que corresponde a la expresión $2 + \sqrt{10}$ en la recta numérica, utilizando regla y compás.
- Tarea III. Lee el siguiente enunciado: "La multiplicación de dos números irracionales siempre da por resultado otro número irracional". ¿Es verdadero o falso? Explica.

¿Cuál de las tareas propuestas es de mayor demanda cognitiva?

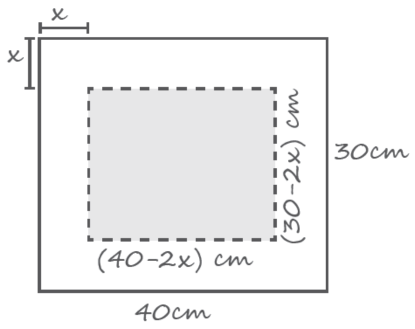
a) La tarea I.
b) La tarea II.
c) La tarea III.

EJERCICIO #10:

Una docente tiene como propósito que los estudiantes de tercer grado resuelvan problemas que involucran ecuaciones cuadráticas. Para ello, les propuso el siguiente problema:

> Roberto tiene un cartón de forma rectangular cuyas dimensiones son 30 cm y 40 cm. Él desea obtener un marco cuya área sea igual a la mitad del área del cartón. Además, la medida del ancho de este marco debe ser constante.
>
> ¿Cuál será la medida del ancho del marco?

Uno de los estudiantes presentó la siguiente resolución:



Como el área del marco y de la parte interna del cartón son iguales, entonces se concluye lo siguiente:

$$(40 - 2x)(30 - 2x) = 600$$
$$1200 - 60x - 80x + 4x^2 = 600$$
$$4x^2 - 140x = 600 - 1200$$
$$x^2 - 35x = -150$$
$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$
$$x = \frac{35 \pm \sqrt{1225 - 600}}{2}$$
$$x_1 = 30 \text{ o } x_2 = 5$$

Respuesta: El ancho puede ser 5 cm o 30 cm.

¿Cuál de las siguientes alternativas expresa el error que se evidencia en la resolución del estudiante?

a) Aplica la fórmula para encontrar las raíces de una ecuación cuadrática cuando es posible hallarlas mediante la factorización por aspa simple.

b) Incluye en su respuesta a una de las raíces de la ecuación cuadrática, la cual carece de sentido en el contexto del problema planteado.

c) Determina las raíces a partir de una ecuación cuadrática sin haberla transformado previamente a la forma $ax^2 + bx + c = 0$.

EJERCICIO #11:

Una docente preguntó a los estudiantes cómo obtener las raíces de una ecuación cuadrática. Uno de los estudiantes respondió: “Hay varias formas. Una de ellas, consiste en representar gráficamente la función cuadrática asociada a la ecuación y para obtener las raíces, siempre hay que apelar a los puntos de intersección de la gráfica de la parábola y el eje X, dado que las abscisas de esos puntos corresponderían a las raíces de la ecuación cuadrática”.

¿Cuál de las siguientes preguntas promueve la generación de conflicto cognitivo en este estudiante?

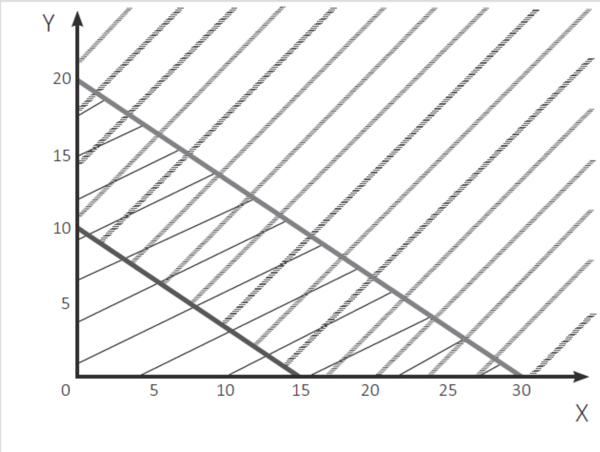
a) ¿Cómo explicarías la obtención de las raíces de una ecuación cuadrática asociada a la función $f(x) = x^2 + 2$?

b) ¿Cómo explicarías la obtención de las raíces de una ecuación cuadrática asociada a la función $f(x) = -x^2 + 4$?

c) ¿Cómo explicarías la obtención de las raíces de una ecuación cuadrática asociada a la función $f(x) = x^2 + 4x + 3$?

EJERCICIO #12:
Durante una sesión de aprendizaje, un docente presenta la gráfica de un sistema de inecuaciones lineales para valores no negativos.

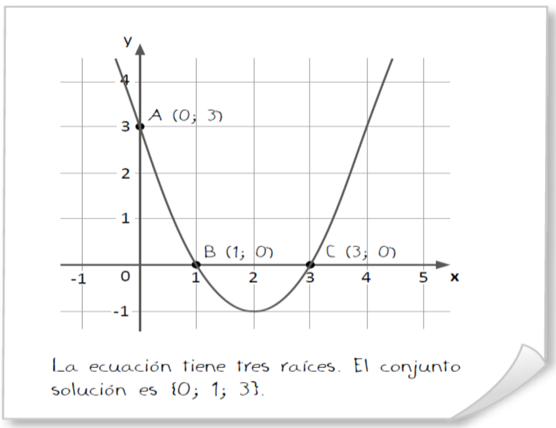
$$\begin{cases} 2x + 3y \geq 30 \\ 2x + 3y \leq 60 \end{cases}$$



El docente busca promover que los estudiantes interpreten la gráfica del sistema de inecuaciones. ¿Cuál de los siguientes grupos de preguntas es **más** pertinente para lograr dicho propósito?

a) ¿Qué representan las regiones generadas por cada inecuación? ¿Qué representan los puntos de la intersección de las regiones?
b) ¿Qué tipo de cuadrilátero es la región que representa la intersección de las regiones? ¿Qué puntos del gráfico corresponden a sus vértices?
c) ¿Cuáles son los puntos de intersección entre los ejes y las rectas que limitan las regiones? ¿Qué puntos pertenecen a la intersección de las regiones?

EJERCICIO #13:
Una docente les pidió a sus estudiantes que resolvieran la ecuación $x^2 - 4x + 3 = 0$, haciendo uso de una representación gráfica en su solución.
Amelia, una de las estudiantes, presentó la siguiente resolución:



¿Cuál de las siguientes alternativas expresa el error en el que incurrió la estudiante?

a) Considerar la representación gráfica de una función cuadrática que no contiene las raíces de la ecuación cuadrática dada.
b) Considerar que una ecuación cuadrática tiene, en cualquiera de los casos, tres raíces, es decir, creer que el conjunto solución está conformado por tres elementos.
c) Considerar que las raíces de una ecuación cuadrática están dadas por las abscisas de los puntos de intersección de la gráfica de la función y los ejes de coordenadas.