MATEMÁTICA: CASUÍSTICA

COMPETENCIA: Resuelve problemas de regularidad, equivalencia y cambio.
Temas: Sucesiones y series.

EJERCICIO #1:

Una docente tiene como propósito que sus estudiantes comprendan la forma del término enésimo de una progresión aritmética.

¿Cuál de las siguientes estrategias es la más pertinente para lograr dicho propósito?

a) Presentar a los estudiantes la fórmula $a_n = a_1 + (n-1)d$ indicando que a_n es el término de lugar n (enésimo término), a_1 es el primer término de la progresión, n es el número de términos y d es la diferencia común o razón aritmética. Luego proponerle una progresión aritmética mostrando sus 4 primeros términos, que identifique al primer término y a la diferencia común y lo reemplace en la fórmula y obtendrá el término enésimo y finalmente pedirle que halle el valor de los términos de lugares 100, 500 y 1000.

b) Proponerle a los estudiantes una sucesión aritmética y explicarle diversas formas cómo hallar el término enésimo, tales como el método de aplicar sistemas de ecuaciones, o el número combinatorio $a_n = a_1 C_0^{n-1} + d C_1^{n-1}$ o un método práctico para hallar el término enésimo $a_n = dn + a_0$ donde a_n es el término de lugar n (enésimo término), d es la diferencia común o razón aritmética y n es el número de términos. Finalmente consolidan su aprendizaje resolviendo problemas de aplicación.

c) Presentar a los estudiantes la formación del término enésimo de la progresión aritmética a través de la inducción, así: $a_1;\ a_1 + r;\ a_1 + 2r;\ a_1 + 3r;\ \cdots$ Luego proponer que establezcan y determinen la regularidad en su formación:

$$\begin{aligned} a_1 &= a_1 \\ a_2 &= a_1 + r \\ a_3 &= a_1 + 2r \\ a_4 &= a_1 + 3r \\ &\vdots \\ a_n &= a_1 + (n-1)d \end{aligned}$$

Finalmente proponerle resolver problemas relacionados con progresiones aritméticas aplicando la inducción y/o aplicando la fórmula del término enésimo.

EJERCICIO #2:

¿Cuál de las siguientes tareas es de mayor demanda cognitiva?

a) En una sucesión, la suma del primero con el segundo término es igual a 2, la suma del segundo con el tercero es 10, la suma del tercero con el cuarto es 18. Si su último término es 111, halla la suma de todos los términos de la sucesión.

b) En la sucesión 2; 9; 16; 23; …, halla el término de lugar 40 y la suma de los primeros 40 términos.

c) En la progresión aritmética $\frac{1}{2}; \frac{5}{6}; 1\frac{1}{6}; \frac{3}{2}; \cdots$, halla el término de lugar 50 y la suma de los primeros 50 términos.

EJERCICIO #3:

Un docente les propone a sus estudiantes la siguiente tarea:

> Los términos de una secuencia, a partir del segundo término, se obtienen al multiplicar el término anterior por 2. Si el primer término de esta secuencia es 3, ¿cuál es el quinto término de la secuencia?

¿Por qué la tarea propuesta por el docente es de baja demanda cognitiva?

a) Porque es una tarea de contexto intramatemático y tareas con este tipo de contexto son más sencillas de resolver que una de contexto extramatemático.

b) Porque es una tarea que implica usar un procedimiento ya establecido para encontrar el término solicitado en la secuencia.

c) Porque es una tarea que involucra el uso de números naturales que tienen menos de tres cifras.

EJERCICIO #4:

Una docente presentó a sus estudiantes una secuencia de figuras:

> • La primera figura es una flecha vertical hacia arriba;
> • la segunda, una flecha horizontal hacia la derecha;
> • la tercera, una flecha vertical hacia abajo;
> • la cuarta, una flecha horizontal hacia la izquierda;
> • y la quinta es una flecha vertical hacia arriba.

Luego, les preguntó: "¿De qué forma varía la posición de la flecha en la secuencia? ¿Cuál es la décima figura de la secuencia?".

¿Cuál es el propósito de aprendizaje involucrado en esta actividad?

a) Reconocer el patrón geométrico en una secuencia.

b) Describir la posición en la que queda cada figura en una secuencia.

c) Proponer una secuencia gráfica que involucra patrones geométricos.

EJERCICIO #5:

Un docente tiene como propósito que sus estudiantes determinen el término n-ésimo de una secuencia numérica. Para ello, les propuso la siguiente tarea:

> Determina el término n-ésimo de la secuencia:
> 3; 7; 11; 15; …

Una estudiante presentó la siguiente resolución:

$$3 = (0 + 1) \times 3 + 0$$
$$7 = (1 + 1) \times 3 + 1$$
$$11 = (2 + 1) \times 3 + 2$$
$$15 = (3 + 1) \times 3 + 3$$
$$19 = (4 + 1) \times 3 + 4$$
$$23 = (5 + 1) \times 3 + 5$$

Entonces, el término n - ésimo de la secuencia es el siguiente:

$$t_n = (n + 1) \times 3 + n = 4n + 3$$

El docente busca retroalimentar a la estudiante para que reflexione sobre el error en el que incurrió al expresar el término n-ésimo.

¿Cuál de las siguientes acciones pedagógicas es pertinente para conseguir este propósito?

a) Preguntar: "¿Cuál es el patrón de la secuencia? ¿Cuál será el valor del séptimo, octavo y noveno término?". Luego, decirle que, en la expresión que representa el término n-ésimo, 'n' corresponde a la posición del término.

b) Preguntar: “Si la expresión correcta para representar el término n-ésimo fuera 4n – 1, ¿qué valores les corresponderían a los primeros términos?”. Luego, pedirle que revise las operaciones que realizó para obtener el valor de cada término.
c) Preguntar: “¿Qué representa ‘n’ en el término n-ésimo encontrado? Si reemplazamos ‘n’ por la posición de un término, ¿el valor que se obtiene coincide con dicho término? ¿Qué relación habrá entre ‘n’ y la posición de cada término?”. Luego, preguntarle si se debe realizar alguna modificación en el término n-ésimo.

EJERCICIO #6:

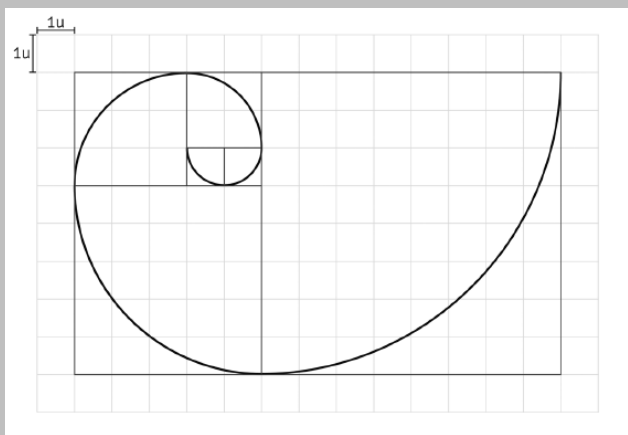
Se tiene dos relojes sincronizados a las 0:00 horas (hora exacta). Si uno de ellos se adelanta 2 minutos cada hora y el otro se atrasa 3 minutos cada hora. ¿Dentro de cuánto tiempo marcarán nuevamente la hora correcta ambos relojes simultáneamente?

a) 20 días
b) 25 días
c) 30 días

EJERCICIO #7:

Una docente presentó la siguiente actividad a los estudiantes:

1. Observa el siguiente gráfico que presenta una espiral que pasa por cuadrados de diferente tamaño.



2. ¿Cuáles son las medidas del lado de cada región cuadrada por donde pasa la espiral, de la más pequeña a la más grande?

3. ¿Cómo se continuaría la construcción de la espiral en el gráfico propuesto?

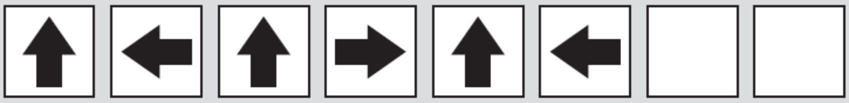
¿Cuál es el **principal** propósito de aprendizaje de la actividad?

a) Reconocer la regla de formación de un patrón numérico.
b) Identificar transformaciones en los patrones geométricos.
c) Relacionar los patrones numéricos con los patrones geométricos.

EJERCICIO #8:

Un docente tiene como propósito que los estudiantes de primer grado resuelvan problemas que involucran patrones. En ese contexto, les presenta el siguiente problema:

Dibuja las dos figuras que continúan en la secuencia.



Uno de los estudiantes menciona que el séptimo término debe ser una flecha hacia arriba. Sin embargo, no puede determinar la dirección que tomaría el octavo término.

De acuerdo con lo que ha mencionado el estudiante, ¿qué logro de aprendizaje evidencia?

a) Reconoce una regla de formación que depende de la posición par o impar de los términos.
b) Reconoce que todos los términos de la secuencia lo constituyen flechas en diferentes posiciones.
c) Reconoce como regla de formación al movimiento de rotación respecto del término inmediato anterior.

EJERCICIO #8:

Un docente planteó el siguiente problema a los estudiantes:

A partir de la expresión $S_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \cdots + \frac{1}{2^n}$, efectúa lo siguiente:

- Encuentra S_1, S_2, S_3, S_4 y S_5. Escribe cada valor como fracción.
- A partir de estos valores, plantea la fórmula del término general.

Un estudiante mostró al docente las siguientes respuestas:

- Los valores de S_1, S_2, S_3, S_4 y S_5 son $\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{7}{8}, \frac{15}{16}$ y $\frac{31}{32}$, respectivamente.
- La fórmula del término general es $S_n = \frac{n-1}{n}$

¿Cuál de las siguientes acciones es pertinente para retroalimentar al estudiante de modo que reflexione sobre su error al proponer la fórmula del término general?

A) Pedirle que explique el significado de n en la fórmula del término general que ha indicado. Luego, preguntarle por la regla de formación que presentan los denominadores y cómo representaría el denominador del enésimo término. Finalmente, solicitarle que halle la relación entre ese denominador y su respectivo numerador.
B) Pedirle que obtenga el sexto y séptimo término de la sucesión. Luego, indicarle que registre el incremento entre los correspondientes numeradores y denominadores de dos términos consecutivos de la sucesión. Finalmente, después de analizar los incrementos, solicitarle que determine la fórmula del término general.
C) Pedirle que identifique la relación entre el numerador y el denominador en cada término de la sucesión. Luego, explicarle la regla de correspondencia que establece la fórmula del término general. Finalmente, solicitarle que realice la comprobación de la fórmula con cada término hallado.

EJERCICIO #9:

Un docente propuso a sus estudiantes la siguiente secuencia conformada por cuadrados grises y blancos.

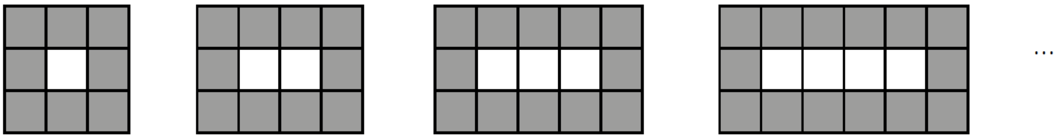


Fig. 1 Fig. 2 Fig. 3 Fig. 4 ...

¿Cuál de los siguientes grupos de preguntas es pertinente para que los estudiantes generalicen simbólicamente la cantidad de cuadrados blancos y grises de cada figura en la secuencia?

a) ¿Cuántos cuadrados más de cada tipo hay entre la figura 1 y la figura 2? ¿Cuántos más habrá entre la figura 2 y la 3? ¿Y entre la 3 y 4? Si para "*n*" cuadrados blancos se necesitan (2*n* + 6) grises, ¿cuántos cuadrados grises se necesitarán para 100 cuadrados blancos?
b) ¿Cuántos cuadrados grises y blancos hay en la figura 1?, ¿en la figura 2?, ¿y en cada una de las figuras? ¿Cuántos cuadrados grises y blancos se necesitarán en la figura 5? Si una figura tuviera 18 cuadrados grises y 6 blancos, ¿qué número de figura de la secuencia sería?
c) ¿Cuántos cuadrados blancos y grises observas en cada figura? ¿Qué relación hay entre los cuadrados blancos y el número de la figura? ¿Qué puedes decir de la cantidad de cuadrados grises en la primera y última columna de cada figura? ¿Y de los cuadrados grises encima y debajo de los blancos? ¿Cuántos cuadrados blancos y grises presentará la figura 20?, ¿y cuántos la figura "*n*"?

EJERCICIO #10:

Un docente propone la siguiente situación a los estudiantes de primer grado.

> Como parte de un tratamiento, a las 8:00 horas una persona recibió una primera dosis de penicilina de 300 miligramos. A partir de entonces, su cuerpo elimina gradualmente la penicilina, de modo que una hora después solo el 60 % de la cantidad de penicilina inicial permanece activo en su sangre. Esta pauta continúa de tal manera que, al final de cada hora, solo permanece activo el 60 % de la penicilina que tuvo al inicio de esa hora.

A partir de la situación anterior, el docente propone tres tareas. ¿Cuál de estas tareas es de **mayor** demanda cognitiva?

a) Hallar en qué porcentaje disminuyó la cantidad de penicilina que permanece activa en la sangre de esta persona dos horas después de la aplicación de la primera dosis.
b) Completar una tabla que muestre la cantidad de penicilina que permanecerá activa en la sangre de esta persona en intervalos de una hora desde el momento de la primera dosis hasta las 11:00 horas.
c) Determinar la hora en que se debe administrar la segunda dosis si se sabe que esta se debe suministrar cuando la penicilina activa en la sangre descienda a un valor cercano a la doceava parte de la primera dosis.

EJERCICIO #11:

Después de realizar actividades con los estudiantes de segundo grado sobre la determinación del término siguiente en una secuencia, una docente busca que ellos desarrollen sus habilidades de generalización para que determinen el término enésimo en una secuencia numérica. Para esto, ella toma como referencia la siguiente situación:

> María decidió ahorrar para comprar un regalo. Asume que depositará algunas monedas en una alcancía todas las noches. Si ella ahorra 5 soles el primer día y cada día posterior deposita 3 soles, ¿cuánto dinero en total tendrá ahorrado en *"n"* días?

¿Cuál de las siguientes acciones pedagógicas es **más** pertinente para el logro del propósito de la docente?

a) Solicitar que identifiquen el dinero con que empezó en la etapa de ahorro y el aumento constante que ocurre cada día posterior. Luego, explicar cómo calcular lo ahorrado en 10 días, en 15 o en 20 días. Indicarles que, de manera similar, se puede obtener la cantidad de dinero ahorrado durante cierta cantidad de días simbolizada por la variable *"n"*. Luego, introducir y explicar el significado de cada elemento de la expresión general $A = 5 + 3(n - 1)$.

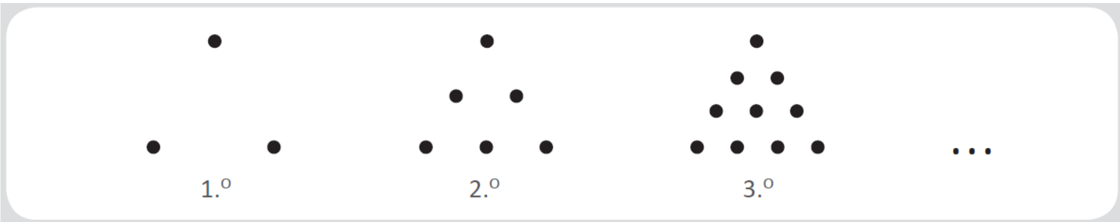
b) Pedir que indiquen la cantidad ahorrada el primer día, así como las cantidades de dinero depositadas a partir del segundo día. Preguntar por la relación entre la cantidad de veces que se deposita los 3 soles con el número de días que lleva ahorrando. Luego, pedir que utilicen sus hallazgos para expresar la cantidad total de dinero en función de la cantidad *"n"* de días ahorrados. Solicitar que verifiquen si funciona la expresión hallada para los casos ya conocidos y otros nuevos.

c) Señalar que es conveniente hacer uso de una expresión general que se puede aplicar para cualquier valor aceptable de *"n"*. Esto permite introducir una expresión para calcular el término enésimo de una progresión aritmética $a_n = a_1 + (n - 1)r$, en la que se puede reemplazar "$a1$" por la cantidad ahorrada en el primer día y *"r"* por la cantidad constante ahorrada a partir del segundo día. El dinero total ahorrado, generalizado para *"n"* días, resultará ser el valor obtenido para *an*.

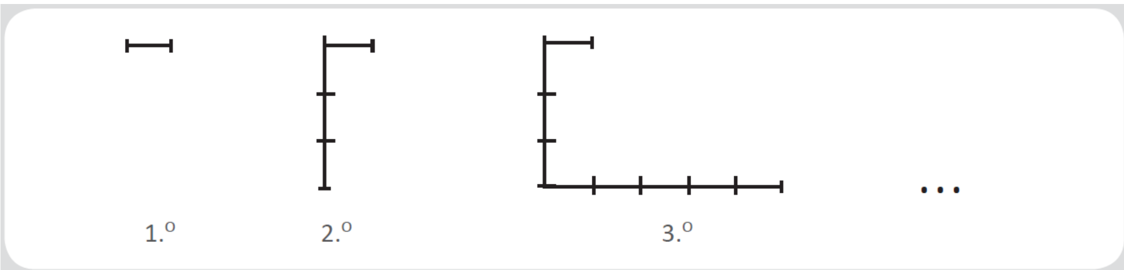
EJERCICIO #12:

El propósito de una sesión de aprendizaje es identificar **patrones geométricos**. Para ello, se han propuesto las siguientes tareas.

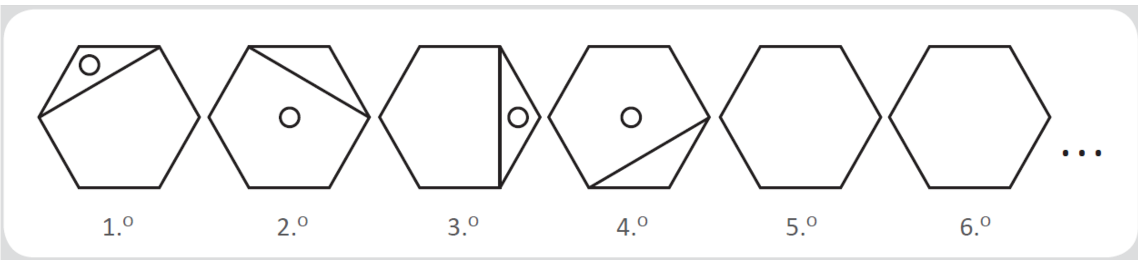
Tarea 1: Observa la siguiente secuencia. ¿Cuántas bolitas ( ) tendrá el 5.° término?



Tarea 2: Observa la siguiente secuencia. Luego, dibuja el 6.° término.



Tarea 3: Observa la siguiente secuencia. Luego, completa los trazos necesarios en el 5.° y 6.° término.



¿Cuál de las tareas **NO** es pertinente para promover el logro del propósito de la sesión?

a) La tarea 1.
b) La tarea 2.
c) La tarea 3.