

PRÁCTICA 27

MATEMÁTICA: CASUÍSTICA

COMPETENCIA: Resuelve problemas de regularidad, equivalencia y cambio.

Temas: Ecuaciones e inecuaciones.

1. Un docente propuso a sus estudiantes la siguiente tarea:

Determina el conjunto solución de la siguiente ecuación: $x^2 - 5x = 0$

A continuación, el docente monitorea el trabajo de los estudiantes, y se detiene a observar la resolución de uno de ellos.

$$\begin{aligned}x^2 - 5x &= 0 \\x^2 &= 5x \\ \frac{x^2}{x} &= 5 \\x &= 5 \\ \text{C.S.} &= \{5\}\end{aligned}$$

El docente busca retroalimentar al estudiante para que reflexione sobre el error en el que incurrió. ¿Cuál de las siguientes acciones pedagógicas es la **más** pertinente para conseguir este propósito?

- Preguntarle: “Si reemplazas la incógnita con el cero, ¿se comprueba la ecuación cuadrática? ¿El cero será otra solución de la ecuación? ¿Por qué? ¿Qué número deberás incluir en el conjunto solución encontrado?”.
 - Preguntarle: “Si factorizamos la expresión $x^2 - 5x$, ¿cuáles son los factores que se obtienen? ¿Qué valores para la incógnita se obtienen al igualar cada factor a cero? ¿Cuáles serán, entonces, las raíces del conjunto solución?”.
 - Preguntarle: “Si una incógnita se caracteriza por representar un valor desconocido, ¿hay alguna condición, en esta ecuación, que indique que la incógnita no pueda tomar el valor de cero? ¿Es correcto dividir x^2 entre la incógnita cuando esta podría ser cero? ¿Crees que estás descartando ese valor al hacer la división? ¿Por qué?”.
2. Un docente presentó a sus estudiantes el siguiente problema:

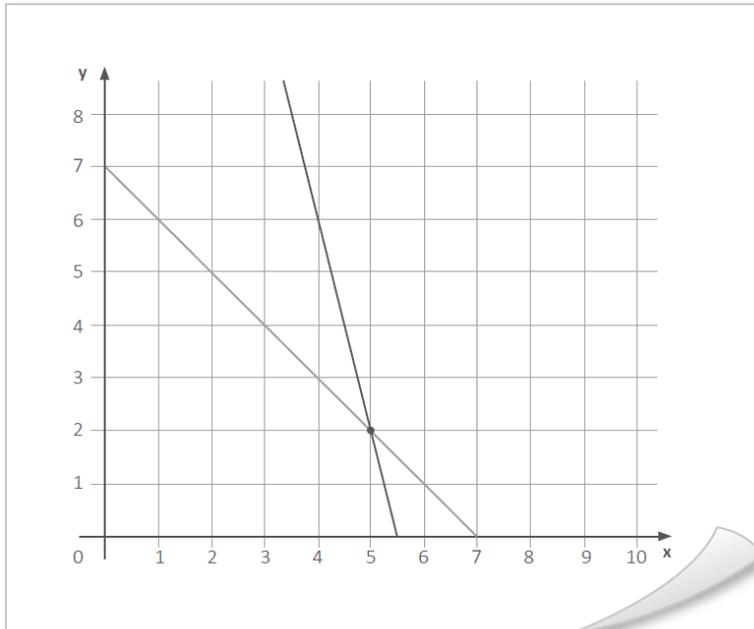
¿Cuál es el conjunto solución de la ecuación $(x + 3)^2 = 144$, sabiendo que $x \in \mathbb{Q}$?

Un estudiante respondió que si extrae la raíz cuadrada a ambos miembros obtiene la ecuación $x + 3 = 12$ y, por tanto, el C.S. = {9}.

¿Cuál de las siguientes preguntas es pertinente para generar conflicto cognitivo en el estudiante?

- Si reemplazas en la ecuación la variable “x” por -15, ¿se verifica la igualdad? ¿-15 también será parte del conjunto solución? ¿9 será el único valor que cumple la igualdad?
- Si revisas tu procedimiento, ¿cómo obtuviste la ecuación $x + 3 = 12$? ¿Podrías explicar cómo obtuviste 9 en el conjunto solución? ¿Será correcto el resultado que has encontrado?
- Si comparas una ecuación lineal y una ecuación cuadrática, ¿qué características tienen en común? ¿Cuál es el grado en cada ecuación? ¿Qué se entiende por ecuación lineal y por ecuación cuadrática?

3. Vilma está resolviendo un problema. Ella ha decidido modelar el problema mediante un sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas y ha graficado dicho sistema de ecuaciones. A continuación, se muestra el gráfico realizado por Vilma.



Se sabe que el procedimiento realizado por Vilma es correcto, ¿cuál de los siguientes problemas podría ser el que está resolviendo Vilma?

- Una familia compuesta por 7 integrantes, entre niños y adultos, ingresa a una feria. Ellos pagan 2 soles por la entrada de un niño y 8 soles por la de un adulto. Si en entradas gastaron 26 soles, ¿cuántos niños y cuántos adultos conforman esta familia?
 - En una prueba de 10 preguntas, se otorga 8 puntos por respuesta correcta, 0 puntos por respuesta omitida y se resta 2 puntos por respuesta incorrecta. Si José respondió 7 preguntas y obtuvo 36 puntos, ¿cuántas repuestas correctas e incorrectas tuvo?
 - En un almacén, se guardan carritos de jardinería (4 ruedas) y carretillas (1 rueda). Si se cuentan en total 7 vehículos de trabajo entre carritos de jardinería y carretillas, y un total de 22 ruedas, ¿cuántos carritos de jardinería y cuántas carretillas están guardados en este almacén?
4. Un docente propone a los estudiantes de cuarto grado las siguientes tareas con números reales.

- Tarea I. Halla el conjunto solución en la siguiente inecuación: $2 + |x + 1| \leq 5$
- Tarea II. Aplica el teorema de Pitágoras para ubicar el punto que corresponde a la expresión $2 + \sqrt{10}$ en la recta numérica, utilizando regla y compás.
- Tarea III. Lee el siguiente enunciado: "La multiplicación de dos números irracionales siempre da por resultado otro número irracional". ¿Es verdadero o falso? Explica.

¿Cuál de las tareas propuestas es de mayor demanda cognitiva?

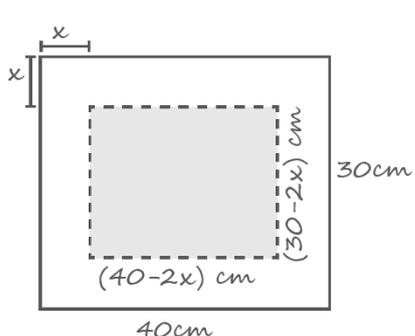
- La tarea I.
- La tarea II.
- La tarea III.

5. Una docente tiene como propósito que los estudiantes de tercer grado resuelvan problemas que involucran ecuaciones cuadráticas. Para ello, les propuso el siguiente problema:

Roberto tiene un cartón de forma rectangular cuyas dimensiones son 30 cm y 40 cm. Él desea obtener un marco cuya área sea igual a la mitad del área del cartón. Además, la medida del ancho de este marco debe ser constante.

¿Cuál será la medida del ancho del marco?

Uno de los estudiantes presentó la siguiente resolución:



Como el área del marco y de la parte interna del cartón son iguales, entonces se concluye lo siguiente:

$$(40 - 2x)(30 - 2x) = 600$$

$$1200 - 60x - 80x + 4x^2 = 600$$

$$4x^2 - 140x = 600 - 1200$$

$$x^2 - 35x = -150$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{35 \pm \sqrt{1225 - 600}}{2}$$

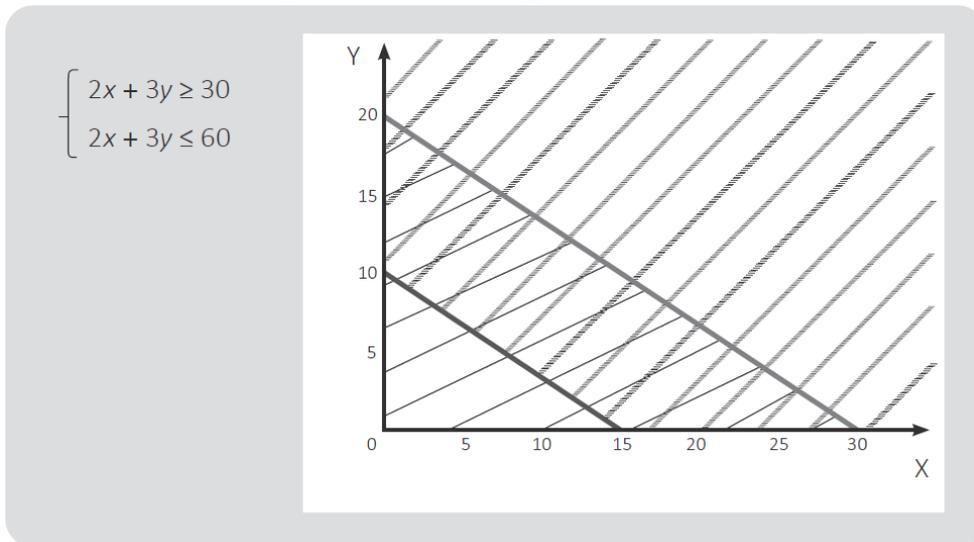
$$x_1 = 30 \text{ o } x_2 = 5$$

Respuesta: El ancho puede ser 5 cm o 30 cm.

¿Cuál de las siguientes alternativas expresa el error que se evidencia en la resolución del estudiante?

- Aplica la fórmula para encontrar las raíces de una ecuación cuadrática cuando es posible hallarlas mediante la factorización por aspa simple.
 - Incluye en su respuesta a una de las raíces de la ecuación cuadrática, la cual carece de sentido en el contexto del problema planteado.
 - Determina las raíces a partir de una ecuación cuadrática sin haberla transformado previamente a la forma $ax^2 + bx + c = 0$.
6. Una docente preguntó a los estudiantes cómo obtener las raíces de una ecuación cuadrática. Uno de los estudiantes respondió: "Hay varias formas. Una de ellas, consiste en representar gráficamente la función cuadrática asociada a la ecuación y para obtener las raíces, siempre hay que apelar a los puntos de intersección de la gráfica de la parábola y el eje X, dado que las abscisas de esos puntos corresponderían a las raíces de la ecuación cuadrática".
- ¿Cuál de las siguientes preguntas promueve la generación de conflicto cognitivo en este estudiante?
- ¿Cómo explicarías la obtención de las raíces de una ecuación cuadrática asociada a la función $f(x) = x^2 + 2$?
 - ¿Cómo explicarías la obtención de las raíces de una ecuación cuadrática asociada a la función $f(x) = -x^2 + 4$?
 - ¿Cómo explicarías la obtención de las raíces de una ecuación cuadrática asociada a la función $f(x) = x^2 + 4x + 3$?

7. Durante una sesión de aprendizaje, un docente presenta la gráfica de un sistema de inecuaciones lineales para valores no negativos.



El docente busca promover que los estudiantes interpreten la gráfica del sistema de inecuaciones. ¿Cuál de los siguientes grupos de preguntas es **más** pertinente para lograr dicho propósito?

- ¿Qué representan las regiones generadas por cada inecuación? ¿Qué representan los puntos de la intersección de las regiones?
- ¿Qué tipo de cuadrilátero es la región que representa la intersección de las regiones? ¿Qué puntos del gráfico corresponden a sus vértices?
- ¿Cuáles son los puntos de intersección entre los ejes y las rectas que limitan las regiones? ¿Qué puntos pertenecen a la intersección de las regiones?

8. Una docente tiene como propósito que los estudiantes de tercer grado resuelvan problemas que involucran ecuaciones cuadráticas. En ese contexto, les presentó el siguiente problema:

En un condominio, se formó una comisión con un representante por cada familia, para arreglar el jardín que comparten. Sus integrantes calcularon que gastarían 60 soles en comprar plantas, por lo cual decidieron asumir equitativamente ese gasto. Sin embargo, debido a que uno de sus integrantes declinó pagar lo que le correspondía, cada uno de los restantes acordó aportar 3 soles más para alcanzar dicho monto. ¿Cuántos integrantes conforman la comisión?

Tres estudiantes del aula plantearon sus respectivas ecuaciones. Ellos coinciden en que la incógnita "x" es la cantidad de integrantes de la comisión.

¿Cuál de las siguientes ecuaciones permite resolver el problema planteado?

- $\frac{60}{x} + 3 = \frac{60}{x-1}$
- $\frac{x}{60} + 3 = \frac{x-1}{60}$
- $\frac{60}{x} + \frac{60}{x-1} + 3 = 60$

9. Durante una sesión de aprendizaje, un docente presenta a los estudiantes actividades sobre inecuaciones lineales. A continuación, se muestra una parte de la resolución que realizó un estudiante.

$$\begin{aligned} & (\dots) \\ & 3x - 6 < 2x \\ & - 6 < 2x - 3x \\ & - 6 < - x \\ & 6 < x \end{aligned}$$

¿Por qué es **errónea** la parte mostrada de la resolución del estudiante?

- a) Porque dejó la incógnita en el lado derecho de la inecuación.
 - b) Porque manejó de manera incorrecta la propiedad del opuesto aditivo.
 - c) **Porque aplicó procedimientos específicos de las ecuaciones a las inecuaciones.**
10. Alberto compró cierta cantidad de pesas de 10 kg y de 30 kg. Él colocó las pesas que compró en dos cajas. Puso la misma cantidad de pesas de 10 kg en cada caja y hará lo mismo con las pesas de 30 kg. Si hubiera comprado una pesa más de 10 kg y una pesa menos de 30 kg, hubiera adquirido en total un peso menor que 100 kg. Y si hubiera comprado una pesa menos de 10 kg y una pesa más de 30 kg, hubiera adquirido en total un peso mayor que 110 kg. ¿Cuántas pesas en total compró Alberto?
- a) **6 pesas.**
 - b) 10 pesas.
 - c) 12 pesas.

11. Una docente propone a sus estudiantes el siguiente problema:

Una empresa confecciona carteras y maletines de cuero, de un solo modelo en cada caso. En la confección de una cartera, se utiliza 2 m^2 de cuero y en la de un maletín, 3 m^2 . Si la empresa dispone de 27 m^2 de cuero, ¿cuántas carteras y maletines se podrían confeccionar en un día?

Uno de los estudiantes, Raúl, responde: “Se pueden confeccionar 6 carteras y 4 maletines, porque se utilizará 12 m^2 de cuero en las carteras y 12 m^2 de cuero en los maletines”.

A lo que otro estudiante, Iván, interviene: “Raúl, tu respuesta es incorrecta porque en 6 carteras y 4 maletines se utilizan 24 m^2 de cuero y aún alcanza para un maletín más; por eso, la respuesta correcta es 6 carteras y 5 maletines”.

¿Cuál de las siguientes alternativas expresa el error que se presenta en la intervención de Iván?

- a) **Considerar que el problema dado tiene respuesta única.**
- b) Asociar en sus cálculos valores de una variable que corresponden a otra.
- c) Prescindir del uso de ecuaciones de primer grado en la resolución del problema.

12. Un estudiante presentó la siguiente resolución a un problema planteado por el docente.

Dada la inecuación: $3x - 3 < 10x + 11$
¿Cuál es su conjunto solución?

Resolución:

Juntamos las incógnitas y los números.

$$3x - 10x < 11 + 3$$
$$-7x < 14$$

Dividimos entre -7 a ambos miembros

$$x < -2$$

Por tanto, el conjunto solución estará conformado por todos los números reales menores que -2 .

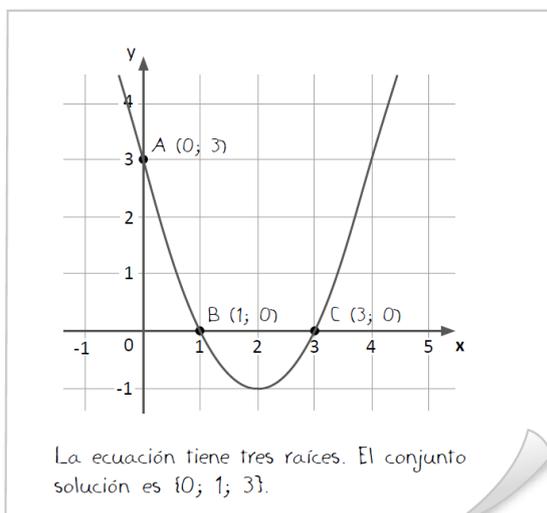
El docente tiene como propósito realizar una retroalimentación para que el estudiante reflexione sobre su error.

¿Cuál de las siguientes intervenciones es **más** pertinente para el logro de su propósito?

- “Revisa tu procedimiento, principalmente la división entre -7 . Al dividir entre un número negativo, ¿crees que el signo de la desigualdad debe quedar tal como está?, ¿o debe cambiar de sentido?”.
- “Tienes que reparar. Anímate, tú puedes lograrlo. Cuando el -7 se divide a ambos lados, el signo de la desigualdad debe cambiar de sentido. Entonces, ¿qué pasa si dividimos entre un número negativo a ambos lados de la desigualdad?”.
- “Si reemplazas un valor de x menor que -2 en la inecuación inicial, ¿se cumple con la desigualdad? Sabiendo que 1 es menor que 5 , ¿el opuesto del primero seguirá siendo menor que el opuesto del segundo? ¿Cómo cambia la relación? ¿Pasará algo similar en la inecuación que forma parte de tu resolución? ¿Por qué?”.

13. Una docente les pidió a sus estudiantes que resolvieran la ecuación $x^2 - 4x + 3 = 0$, haciendo uso de una representación gráfica en su solución.

Amelia, una de las estudiantes, presentó la siguiente resolución:



¿Cuál de las siguientes alternativas expresa el error en el que incurrió la estudiante?

- a) Considerar la representación gráfica de una función cuadrática que no contiene las raíces de la ecuación cuadrática dada.
- b) Considerar que una ecuación cuadrática tiene, en cualquiera de los casos, tres raíces, es decir, creer que el conjunto solución está conformado por tres elementos.
- c) Considerar que las raíces de una ecuación cuadrática están dadas por las abscisas de los puntos de intersección de la gráfica de la función y los ejes de coordenadas.

14. A continuación, se presenta el procedimiento que utilizó un estudiante para resolver una ecuación cuadrática.

$$120 - 46x + 4x^2 = 60$$
$$60 - 23x + 2x^2 = 30$$
$$15 - 2x = 0 \quad \vee \quad 4 - x = 0$$
$$15 = 2x \quad \vee \quad 4 = x$$
$$x = \frac{2}{15} \quad \vee \quad x = 4$$
$$C. S. = \left\{ \frac{2}{15}; 4 \right\}$$

Sobre la resolución de la ecuación cuadrática presentada, ¿cuál es el principal error del estudiante en este procedimiento?

- a) Considerar que el producto de los factores del trinomio es igual a cero cuando antes de factorizar dicho trinomio este era igual a un número diferente de cero.
- b) Considerar que un trinomio se puede factorizar, aplicando la técnica del aspa simple, cuando este no se encuentra ordenado de forma decreciente.
- c) Considerar que el valor de la incógnita es $2/15$ y satisface la ecuación $15 = 2x$.